1) Exponentielle et limites

Déterminer les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x}$ **b)** $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x + x}{e^x + 1}$ **c)** $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x^3}$ **d)** $\lim\limits_{x \to -\infty} x^2 e^x$

Corrigé :

………

………

………

2) Exponentielle, équations et inéquations

Résoudre les équations et l'inéquation suivantes :

a) $e^{2x} - e^{x} = 0$ **b)** $e^{x} + 2 - 3e^{-x} = 0$ **c)** $e^{2x} \geq \frac{e}{e^{x}}$

Corrigé :

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

Extrait de l'académie en ligne du CNED

Exercice 5 Résoudre dans $\mathbb{R}$:

❶ $e^{2x-3}-e^{x+1}=0$; ❷ $e^{2x}+e^{x}-2=0$;

❸ $e^{2(x+1)}-(1+e^{2})e^{x}+1=0$; ❹ $e^{x^2+8}=\left(e^{x}\right)^{2}$;

❺ $e^{x^2}>e^{3x}$; ❻ $e^{2x}+e^{x}-2>0$;

❼ $\dfrac{2}{e^{x}+1}<e^{x}$.

Exercice 6 Résoudre dans $\mathbb{R}$:

❶ $e^{3x+1}=5$; ❷ $e^{2x}-e^{x}-2=0$;

❸ $e^{x-1}>3$; ❹ $e^{x-1}>-3$.

Exercice 7 Donner l'expression de la fonction dérivée de chacune des fonctions suivantes sur l'intervalle donné.

❶ Sur $\mathbb{R}$, $f_1(x)=x^2e^{x}$; ❷ sur $\mathbb{R}$, $f_2(x)=e^{-x^2+4x-1}$;

❸ sur $\mathbb{R}$, $f_3(x)=\sqrt{1+\dfrac{1}{e^{x}}}$; ❹ sur $\mathbb{R}$, $f_4(x)=\dfrac{e^{x}-1}{e^{x}+1}$;

❺ sur $\mathbb{R}^*$, $f_5(x)=e^{\frac{1}{x}}$.

Exercice 8 Déterminer les limites suivantes.

❶ $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(e^{x}-x\right)$ ❷ $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(e^{2x}-e^{-x}\right)$ ❸ $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x}{e^{x}}$

❹ $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{x}-1}{x+3}$ ❺ $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+1)e^{x}$ ❻ $\lim\limits_{x\to-\infty}(x+1)e^{x}$.

Exercice 9 Dresser le tableau de variation de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=xe^{x}$.

Exercice 10 Partie A : étude d'une fonction

Soit la fonction f définie sur l'intervalle $I=[0;30]$ par : $f(t)=2500\times e^{-0,513t}$.

❶ Donner le sens de variation de la fonction f sur I.

❷ Tracer la courbe représentative de la fonction f dans le plan muni d'un repère orthogonal d'unités graphiques : 1 cm pour 1 unité en abscisse, et 1 cm pour 200 unités en ordonnée.

Corrigé :

3) Logarithme népérien, un peu de calcul

Exercice 1 Exprimer à l'aide de $\ln 2$ ou de $\ln 3$ (ou des deux) les nombres suivants :

$$\ln 6 \,;\, \ln 16 \,;\, \ln 24 \,;\, \ln\left((-3)^2\right) ;\, \ln 54 \,;\, \ln\left(\frac{4}{27}\right) ;\, \ln(\sqrt{36}) ;\, \ln\left(\frac{9}{8}\right).$$

Exercice 2 Exprimer à l'aide de $\ln 3$, les nombres suivants :

$$\ln 63 - \ln 7 \,;\, \ln(27\sqrt{3}) \,;\, 2\ln 21 - \ln 49.$$

Exercice 3 Simplifier les écritures suivantes :

$$C = 5\ln\left(\frac{1}{3}\right) - 4\ln\sqrt{3} \,;\, D = \ln\left(\frac{4}{5}\right) + \ln\left(\frac{5}{3}\right) + \ln\left(\frac{3}{4}\right).$$

Exercice 4 Simplifier :

$$E = e^{\ln 6 - \ln 3} \,;\, F = e^{-\frac{1}{2}\ln 4} \,;\, G = e^{\ln 28 - \ln 4} \,;\, H = e^{2\ln 3 + 3\ln 2} \,;\, I = \ln\left(\frac{1}{e^5}\right).$$

Exercice 5 Vrai / Faux, à chercher sans calculatrice.

a) $\ln 2 < 1 < \ln 3$.

b) Dans $\mathbb{R}$, l'ensemble des solutions x de l'inéquation $x \times \ln 0{,}5 \leq \ln\sqrt{2}$ est $S = \left]-\infty \,;\, -\frac{1}{2}\right]$.

c) Si $x = e^5 \times e^7$ alors $\ln x = 35$.

d) Si $a = \ln 11 - \ln 4{,}9$ et $b = \ln 5{,}2$ alors $a < b$.

Exercice 6 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations :

1. $\ln(5x+2) = \ln 3$;
2. $\ln(-2x+1) = 0$;
3. $\ln(3x+1{,}5) = 2$;
4. $e^{2x-3} = 2$.

Exercice 7 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1. $\ln(x+3) + \ln(x+2) = \ln(x+11)$;
2. $\ln(x^2+5x+6) = \ln(x+11)$;
3. $(\ln x)^2 + 2\ln x - 3 = 0$.

Exercice 8 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations :

1. $\ln x > \ln 3$;
2. $\ln(x+1) \geq \ln 3$;
3. $\ln x \leq 1$;
4. $\dfrac{e^{2x}}{e^{-x}} < 6$;
5. $\ln(1-x^2) \geq 0$.

Exercice 9 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes :

1. $e^{2x} - 5e^x + 4 = 0$;
2. $e^{4x+1} - 2e^{2x} - \dfrac{3}{e} = 0$;
3. $e^{3x} - 2e^{2x} - e^x \leq 0$.

Exercice 10

1. On sait que $\lim\limits_{n\to+\infty} 2^n = +\infty$ (suite géométrique de raison strictement supérieure à 1). Ceci signifie qu'on peut rendre 2^n aussi grand qu'on veut pourvu que n soit assez grand.
   Déterminer le plus petit entier n pour lequel $2^n \geq 3^{15}$.
2. On sait que $\lim\limits_{n\to+\infty} 0{,}9^n = 0$ (suite géométrique de raison positive et strictement inférieure à 1). Ceci signifie qu'on peut rendre $0{,}9^n$ aussi petit qu'on veut pourvu que n soit assez grand.
   Déterminer le plus petit entier n pour lequel $0{,}9^n \leq 0{,}001$.

Corrigé :