Cours : fiche n°6 - Exponentielle et logarithme

Thème : études des fonctions exponentielles et logarithmes.

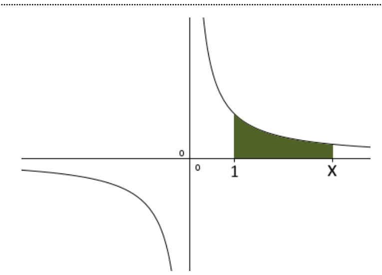
1. Définitions

Nous allons définir deux nouvelles fonctions usuelles : le logarithme népérien et l'exponentielle. Nous étendrons ensuite ces deux fonctions à une catégorie de fonctions : les logarithmes et les exponentielles de base quelconque.

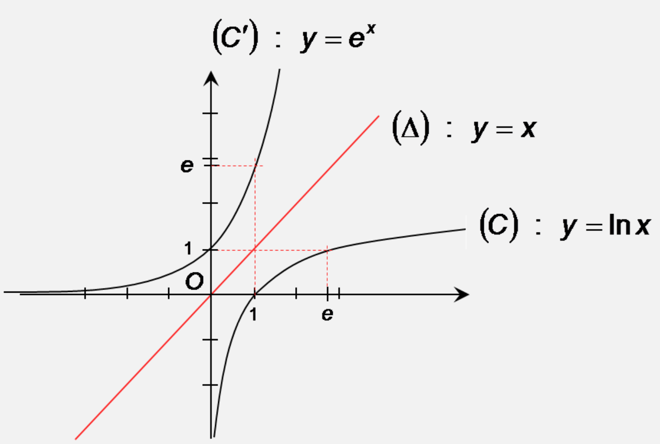
Soit $x \in \mathbb{R}_*^+$, le logarithme népérien, noté $ln(x)$ est défini par :

$$ln(x) = \int_1^x \frac{1}{x} dx$$

Le logarithme népérien de x réel strictement positif est donc défini par une intégrale, laquelle représente l'aire sous la courbe représentative de la fonction inverses sur l'intervalle $[1; x]$. A droite, on a représenté l'intégrale en question.



Remarque ! Etant donné que la fonction inverse $\frac{1}{x}$ n'est pas définie en 0 et qu'elle n'est donc pas continue sur $\mathbb{R}$, on comprendra bien et on retiendra bien que $\ln(x)$ est uniquement définie sur $\mathbb{R}_*^+ =]0; +\infty[$.



En partant de cette définition, on peut dresser la courbe représentative de la fonction logarithme népérien.

Quant à la courbe représentative de la fonction exponentielle, elle est symétrique à celle du logarithme népérien par rapport à la 1ère bissectrice.

Le logarithme népérien $ln(x)$, défini sur $\mathbb{R}_*^+$, est la seule primitive de $\frac{1}{x}$ s'annulant en 1.

Preuve :

On définit la fonction exponentielle à partir du logarithme népérien. On notera bien que le logarithme népérien est défini de $\mathbb{R}_*^+ \rightarrow \mathbb{R}$.

Soit $x \in \mathbb{R}$, la fonction exponentielle notée $exp(x)$ ou encore e^x est définie comme étant la réciproque de la fonction logarithme népérien, ce qui se traduit formellement par l'une des deux propositions suivantes :

- Soit $x \in \mathbb{R}_*^+$ et soit $y \in \mathbb{R}$, $y = ln(x) \Leftrightarrow exp(y) = x$;
- Soit $x \in \mathbb{R}_*^+$, $exp\big(ln(x)\big) = x$.

Comme $exp(x)$ est la réciproque de la fonction $ln(x)$, sa courbe représentative est symétrique à celle de $ln(x)$ par rapport à la première bissectrice, ce qui nous permet (voir ci-avant) permet de construire sa représentation.

De ces définitions, on tire immédiatement les propriétés suivantes :

(i) $ln(1) = 0$	**(ii)** $exp(0) = 1$	**(iii)** $\forall x \in \mathbb{R}, ln\big(exp(x)\big) = x$	**(iv)** $\forall x \in \mathbb{R}, exp(x) > 0$

Preuve :

(i) $ln(1) = \int_1^1 \frac{1}{x} dx = 0$. **(ii)** Par définition de $exp(x)$, $ln(1) = 0 \Longrightarrow 1 = exp(0)$.

(iii) Par définition $y = ln(x) \Leftrightarrow exp(y) = x$, soit en remplaçant y par $ln(x)$: $exp\big(ln(x)\big) = x$.

(iv) Comme $ln(x)$ est définie de $\mathbb{R}_*^+ \rightarrow \mathbb{R}$, $exp(x)$ est réciproquement définie de $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_*^+$ et donc on a bien $exp(x) > 0$ pour tout $x\ réel$.

2. Dérivation et variations

2.1. Dérivation

Comme le logarithme népérien est une primitive de $\frac{1}{x}$, on dispose de la propriété suivante :

La dérivée de la fonction logarithme népérien est : $\forall x \in \mathbb{R}_*^+, ln'(x) = \frac{1}{x}$.

Par ailleurs, on a prouvé dans la fiche de cours n°5 une formule permettant de déterminer la dérivée de la fonction réciproque $f^{-1\,\prime}$ d'une fonction f. On obtient la dérive de exp en utilisant le fait que exp est défini comme étant la réciproque de la fonction ln :

La dérivée de la fonction exponentielle est : $\forall x \in \mathbb{R}, exp'(x) = exp(x)$.

Preuve : on a prouvé dans la fiche de cours n°5 que $f^{-1\,\prime} = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}$.

Or $exp = ln^{-1}$. On a donc $exp'(x) = \frac{1}{ln'\big(exp(x)\big)} = \frac{1}{\frac{1}{exp(x)}} = exp(x)$.

Grâce au théorème de dérivation des fonctions composées, on prouve également les résultats généraux suivants :

Soit u une fonction définie d'un intervalle $I \subseteq \mathbb{R}$ dans $J \subseteq \mathbb{R}_*^+$. Alors : $\forall x \in \mathbb{R}, \big(ln(u)\big)' = \frac{u'}{u}$
Soit u une fonction définie d'un intervalle $I \subseteq \mathbb{R}$ dans $J \subseteq \mathbb{R}$. Alors : $\forall x \in \mathbb{R}, \big(exp(u)\big)' = u'exp(u)$.

Preuve : soit $v : I \to J$ et $u : H \to I$. Alors, on sait que $(v \circ u)' = u'(v' \circ u)$.

- On note $v(x) = ln(x)$, on a donc $(v \circ u)(x) = ln\big(u(x)\big)$.

Alors : $(v \circ u)'(x) = \big(ln(u)\big)'(x) = u'(x)ln'\big(u(x)\big) = u'(x)\frac{1}{u(x)} = \frac{u'(x)}{u(x)}$

- On note $v(x) = exp(x)$, on a donc $(v \circ u)(x) = exp\big(u(x)\big)$.

Alors : $(v \circ u)'(x) = \big(exp(u)\big)'(x) = u'(x)exp'\big(u(x)\big) = u'(x)exp\big(u(x)\big)$.

2.2. Variations

Grâce aux *courbes représentatives* des fonctions ln et exp figurant à la page 1, on peut supposer les propriétés suivantes :

(i) La fonction $ln(x)$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_*^+$. Autrement dit : $\forall x, y \in \mathbb{R}_*^+, x < y \Longrightarrow ln(x) < ln(y)$.
(ii) La fonction $ln(x)$ réalise une bijection de $\mathbb{R}_*^+$ dans $\mathbb{R}$. Autrement dit : $\forall y \in \mathbb{R}, \exists!\, x \in \mathbb{R}_*^+, y = ln(x)$. Ou encore : : $\forall x, y \in \mathbb{R}_*^+, ln(x) = ln(y) \Leftrightarrow x = y$. En particulier : $\lim\limits_{x \to +\infty} ln(x) = 0$ et $\lim\limits_{x \to 0^+} ln(x) = +\infty$ *N.B. : ∃! signifie « il existe un unique ».*
(iii) La fonction $exp(x)$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Autrement dit : $\forall x, y \in \mathbb{R}_*^+, x < y \Longrightarrow exp(x) < exp(y)$.
(iv) La fonction $exp(x)$ réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_*^+$. Autrement dit : $\forall y \in \mathbb{R}_*^+, \exists!\, x \in \mathbb{R}, y = exp(x)$. Ou encore : : $\forall x, y \in \mathbb{R}_*^+, exp(x) = exp(y) \Leftrightarrow x = y$. En particulier : $\lim\limits_{x \to +\infty} exp(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} exp(x) = 0$. *N.B. : ∃! signifie « il existe un unique ».*

Ces propriétés se traduisent par le tableau de variation suivant :

x	0	1	$+\infty$
$ln(x)$	$-\infty$	0	$+\infty$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$exp(x)$	0	1	$+\infty$

Preuve :

(i) Comme $\forall x \in \mathbb{R}_*^+, ln'(x) = \frac{1}{x} > 0$, alors la fonction $ln(x)$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_*^+$.

(ii) Comme $\forall x \in \mathbb{R},\ exp'(x) = exp(x) > 0$, alors la fonction $exp(x)$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_*^+$.
(iii) Comme $ln(x)$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_*^+$, le théorème des valeurs intermédiaires nous permet d'affirmer que $ln(x)$ réalise une bijection de $\mathbb{R}_*^+$ dans $I = \left[\lim_{x\to 0} ln(x)\,;\ \lim_{x\to+\infty} ln(x)\right]$. Il reste à montrer que $\lim_{x\to 0} ln(x) = -\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} ln(x) = +\infty$, résultats que nous admettrons.

A titre indicatif, voici l'allure d'une preuve possible :
Il s'agit d'une preuve par l'absurde. On suppose qu'il existe $l \in \mathbb{R}$ tel que $\lim_{x\to+\infty} ln(x) = \lim_{x\to+\infty} \int_1^x \frac{1}{x} dx = l$.
Par définition d'une l'intégrale, cela revient à dire que :
$\lim_{x\to+\infty}\left(\lim_{n\to+\infty} \frac{x-1}{n} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{1+k\frac{x-1}{n}}\right) = l \Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{1+k} = l$ Or, on montre que cette somme, alors qualifiée de série, diverge vers $+\infty$. En effet, cette série est dite de même nature que la série de Riemann $\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k^\alpha}$ avec $\alpha = 1$, laquelle diverge pour $\alpha \le 1$. On en déduit que $l = +\infty \notin \mathbb{R}$. Ce qui est absurde. On conclut assez vite que $l = +\infty$. On peut adopter un raisonnement similaire afin de prouver que $\lim_{x\to 0} ln(x) = -\infty$.

(iv) D'après (ii), $exp(x)$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, le théorème des valeurs intermédiaires nous permet donc d'affirmer que $exp(x)$ est une bijection de $\mathbb{R} \longrightarrow J$ avec $I = \left[\lim_{x\to 0} exp(x)\,;\ \lim_{x\to+\infty} exp(x)\right]$.
De plus, d'après (ii), $\lim_{y\to 0} ln(y) = -\infty$ et $\lim_{y\to+\infty} ln(y) = +\infty$. En posant $x = ln(y)$, il vient que :

- $\lim_{x\to+\infty} exp(x) = \lim_{y\to+\infty} exp\big(ln(y)\big) = \lim_{y\to+\infty} y = +\infty$
- $\lim_{x\to-\infty} exp(x) = \lim_{y\to 0} exp\big(ln(y)\big) = \lim_{y\to 0} y = 0.$

3. Propriétés

3.1. Propriétés algébriques du logarithme népérien

Quelques propriétés à bien connaître :

(i) $\forall x, y \in \mathbb{R}_*^+,\ ln(xy) = ln(x) + ln(y)$

(ii) $\forall x \in \mathbb{R}_*^+,\ ln\left(\frac{1}{x}\right) = -ln(x)$

(iii) $\forall x, y \in \mathbb{R}_*^+,\ ln\left(\frac{x}{y}\right) = ln(x) - ln(y)$

(iv) $\forall x \in \mathbb{R}_*^+\ \forall n \in \mathbb{Z},\ ln(x^n) = nln(x)$
N.B. : cette propriété est encore vraie pour $n \in \mathbb{Q}$.

(iv) $\forall x \in \mathbb{R}_*^+\ \forall n \in \mathbb{N},\ ln\left(\frac{1}{x^n}\right) = -nln(x)$

Preuve : les démonstrations **(i)** et **(ii)** sont hors programme. Les voici toutefois.

(i) Par définition de $ln(x)$, on a : $\forall a, b \in \mathbb{R}_*^+, ln(ab) = \int_1^{ab} \frac{1}{x} dx$.
On pose $t = \frac{1}{a}x$. D'où $x = at$ et $dx = adt$. Par changement de variable, on obtient :

$$ln(ab) = \int_{1}^{ab} \frac{1}{x}dx = \int_{1\times\frac{1}{a}}^{ab\times\frac{1}{a}} \frac{1}{at}adt = \int_{\frac{1}{a}}^{b} \frac{1}{t}dt = \int_{\frac{1}{a}}^{1} \frac{1}{t}dt + \int_{1}^{b} \frac{1}{t}dt = \int_{\frac{1}{a}}^{1} \frac{1}{t}dt + ln(b)$$

On pose ensuite $u = ax$. D'où $x = \frac{1}{a}t$ et $dx = \frac{1}{a}du$. Par changement de variable, on obtient :

$$ln(ab) = \int_{\frac{1}{a}}^{1} \frac{1}{t}dt + ln(b) = \int_{\frac{1}{a}\times a}^{1\times a} \frac{1}{\frac{1}{a}u}\frac{1}{a}du + ln(b) = \int_{1}^{a} \frac{1}{u}du + ln(b) = ln(a) + ln(b)$$

(ii) Par définition de $ln(x)$, on a : $\forall a \in \mathbb{R}_*^+,\ ln\left(\frac{1}{a}\right) = \int_1^{\frac{1}{a}} \frac{1}{x}dx$

$$ln\left(\frac{1}{a}\right) = \int_{1}^{\frac{1}{a}} \frac{1}{x}dx = \int_{1\times a}^{\frac{1}{a}\times a} \frac{1}{\frac{1}{a}t}\frac{1}{a}dt = \int_{a}^{1} \frac{1}{t}dt = -\int_{1}^{a} \frac{1}{t}dt = -ln(a)$$

(iii) D'après (i) et (ii), on peut écrire :

$\forall a, b \in \mathbb{R}_*^+, ln\left(\frac{a}{b}\right) = ln\left(a \times \frac{1}{b}\right) = ln(a) + ln\left(\frac{1}{b}\right) = ln(a) - ln(b)$

(iv) Sachant que $ln(ab) = ln(a) + ln(b)$, un raisonnement par récurrence semble tout indiqué :

On désire montrer la proposition suivante : P_n: "$\forall a \in \mathbb{R}_*^+\ \forall n \in \mathbb{Z},\ ln(a^n) = nln(a)$"

Montrons tout d'abord P_n pour n entier naturel :

- On pose $n = 0$: $ln(a^0) = ln(1) = 0 = 0ln(a)$. D'où P_0 vraie.
- On suppose que pour $n \in \mathbb{N}, ln(a^n) = nln(a)$. On a :

$ln(a^{n+1}) = ln(a \times a^n) = ln(a) + ln(a^n) = ln(a) + nln(a) = (n+1)ln(a)$

D'où P_{n+1} vraie si P_n vraie.

- Conclusion : P_n est vraie pour tout n entier naturel.

Etendant cette proposition au cas plus général où n est un entier relatif :

- Pour $n > 0$, c'est ok ! L'initialisation (cas où $n = 0$) est elle-aussi ok !
- On suppose que pour $n \in \mathbb{Z},\ n < 0, ln(a^n) = nln(a)$. On a :

$ln(a^{n-1}) = ln\left(\frac{a^n}{a}\right) = ln(a^n) - ln(a) = nln(a) - nln(a) = (n-1)ln(a)$

D'où P_{n-1} vraie si P_n vraie et la proposition se propage donc à tous les n entiers négatifs.

- Conclusion : P_n vraie pour tout n entier relatif.

(iv) $\forall x \in \mathbb{R}_*^+\ \forall n \in \mathbb{N},\ ln\left(\frac{1}{x^n}\right) = ln(x^{-n}) = -nln(x)$ d'après (iii).

3.2. Propriétés algébriques de l'exponentielle

Nous préfèrerons désormais la notation e^x putôt que $exp(x)$. Justifions tout d'abord cette notation en redéfinissant la fonction exponentielle d'une manière plus commode :

> Soit e le nombre tel que $ln(e) = 1$. On a $exp(x) = e^x$.

Important ! On retiendra bien que la fonction exponentielle est finalement équivalente à un simple nombre élevé à la puissance x. Dès lors, nombreuses sont les propriétés de le fonctions exponentielles qui semblent évidente intuitivement ! En effet, nos bons vieux calculs de collège tels que $\forall a \in \mathbb{R}, \forall m, n \in \mathbb{Z}, a^{m+n} = a^m a^n$ s'appliquent à $exp(x)$.

Bien entendu, il convient de justifier la notation précédente. Pour ce faire, énonçons et prouvons tout d'abord quelques propriétés de la fonction exponentielle à bien connaître :

(i) $\forall x, y \in \mathbb{R},\ e^{x+y} = e^x e^y$

(ii) $\forall x \in \mathbb{R},\ e^{-x} = \frac{1}{e^x}$

(iii) $\forall x, y \in \mathbb{R},\ e^{x-y} = \frac{e^x}{e^y}$

(iv) $\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{Z},\ (e^x)^n = e^{nx}$
N.B. : cette propriété est encore vraie pour $n \in \mathbb{Q}$, et même pour $n \in \mathbb{R}$.

(v) $\forall x \in \mathbb{R}\ \forall n \in \mathbb{Z},\ \frac{1}{e^{nx}} = e^{-nx}$

Preuves : toutes ces propriétés peuvent être retrouvées assez facilement à partir des propriétés algébriques du logarithme népérien.

(i) $\forall x, y \in \mathbb{R}$, on a $ln(e^{x+y}) = x + y$ et $ln(e^x e^y) = ln(e^x) + ln(e^y) = x + y$.

Donc $ln(e^{x+y}) = ln(e^x e^y)$. Or, $\forall a, b \in \mathbb{R}_*^+, ln(a) = ln(b) \Leftrightarrow a = b$. D'où $e^{x+y} = e^x e^y$.

(i) $\forall x, y \in \mathbb{R}$, on a $ln(e^{-x}) = -x$ et $ln\left(\frac{1}{e^x}\right) = -\,ln(e^x) = -x$.

D'où $ln(e^{-x}) = ln\left(\frac{1}{e^x}\right) \Leftrightarrow e^{-x} = \frac{1}{e^x}$.

(iii) D'après (i) et (ii), $\forall x, y \in \mathbb{R}, \frac{e^x}{e^y} = e^x \frac{1}{e^y} = e^x e^{-y} = e^{x+(-y)} = e^{x-y}$

(iv) Une démonstration par récurrence semble tout indiquée. On peut la résumer ainsi :

D'après (i), on a $e^{nx} = e^{\overbrace{x+x+\cdots+x}^{n\,fois}} = e^x \times e^{\overbrace{x+x+\cdots+x}^{n-1\,fois}} = \cdots = \overbrace{e^x \times e^x \times \ldots \times e^x}^{n\,fois} = e^{xn}$

(iv) On pose $X = nx$ avec $n \in \mathbb{Z}$ et $x \in \mathbb{R}$. D'après (ii), on a $\frac{1}{e^{nx}} = \frac{1}{e^X} = e^{-X} = e^{-nx}$.

Remarque ! Les formule (iv) précédente, qu'on aurait pu pareillement prouver en la notant $exp(a)^n = exp(na)$, permet d'écrire $exp(x) = exp(1 \times x) = exp(1)^x$. On note $e = exp(1)$. On a alors $exp(x) = e^x$. Il y a donc équivalence entre les notations $exp(x)$ et e^x.

4. Equations et inéquations

Exemple : résoudre l'inéquation (E) : $\frac{1}{4}e^{2x} + 5e^x - 11 \leq 0$.

On pose $X = e^x$, on a alors $\frac{1}{4}e^{2x} + 5e^x - 11 = \frac{1}{4}(e^x)^2 + 5e^x - 11 = \frac{1}{4}X^2 + 5X - 11$.

- $\Delta = 5^2 - 4 \times \frac{1}{4} \times (-11) = 25 + 11 = 36 = 6^2 > 0$;

- Les solutions de l'équation $\frac{1}{4}X^2+5X-11=0$ sont donc $X_1=\frac{-5-6}{2\times\frac{1}{4}}=-22$ et $X_1=\frac{-5+6}{2\times\frac{1}{4}}=2$.
- Comme le coefficient devant X^2 est $\frac{1}{4}>0$, on a $\frac{1}{4}X^2+5X-11\leq 0 \Leftrightarrow X\in[-22;2]$.
- $X\in[-22;2] \Leftrightarrow e^x\in[-22;2] \Leftrightarrow -22\leq e^x\leq 2 \Leftrightarrow e^x\leq 2$ puisque $\forall x\in\mathbb{R}, e^x>0>-22$.
- Donc $X\in[-22;2] \Leftrightarrow e^x\leq 2 \Leftrightarrow ln(e^x)\leq ln(2) \Leftrightarrow x\leq ln(2)$.
- En conclusion, la solution S de l'inéquation (E) est l'ensemble des $x\in\mathbb{R}$ tel que $x\leq ln(2)$, ce qu'on peut encore noter $S=\{\, x\in\mathbb{R} \,/\, x\leq ln(2)\,\}$.

<u>Exemple</u> : résoudre l'équation (E) : $ln(2x+1)+ln(-x-2)=0$

Tout d'abord, il convient de bien se rappeler que $ln(X)$ est défini pour tout x réel strictement positif :

- $ln(2x+1)$ existe si et seulement si $2x+1>0 \Leftrightarrow x>-\frac{1}{2}$.
- $ln(-x-2)$ existe si et seulement si $-x-2>0 \Leftrightarrow x>-2$
- $ln(2x+1)+ln(-x-2)$ existe donc si et et seulement si $x>-\frac{1}{2}$

Pour tout $x\in\left]-\frac{1}{2};+\infty\right[$:

$(E) \Leftrightarrow\ ln(2x+1)+ln(-x-2)=0 \Leftrightarrow e^{ln(2x+1)+ln(-x-2)}=0 \Leftrightarrow e^{ln(2x+1)}e^{ln(-x-2)}=0$

$(E) \Leftrightarrow (2x+1)(-x-2)=0 \Leftrightarrow\ -3x^2-5x-2=0$

Comme $\Delta=(-5)^2-4\times(-3)\times(-2)=25-24=1=1^2>0$:

$(E) \Leftrightarrow\ x=\frac{-(-5)-1}{2\times(-3)}=\frac{4}{-6}=-\frac{2}{3}\ ou\ x=\frac{-(-5)+1}{2\times(-3)}=\frac{6}{2\times(-3)}=-1$

Or $-\frac{2}{3}\notin\left]-\frac{1}{2};+\infty\right[$ et $-1\notin\left]-\frac{1}{2};+\infty\right[$, l'équation (E) n'admet donc aucune solution.

5. Croissance comparée

Vous connaissez sans doute bien la plupart des limites usuelles. Et vous connaissez désormais les limites de $ln(x)$ et e^x aux bornes de leur ensemble de définition respectif. A présent, nous allons montrer quelques propriétés sur les limites qu'on qualifie de « Théorèmes de croissance comparée ». Les opérations usuelles sur les limites ne permettent pas de prouver ces théorèmes. En effet, chacun d'entre eux nous fait tomber sur une forme indéterminée !

(i) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}=+\infty$	**(ii)** $\lim\limits_{x\to-\infty}xe^x=0$
(iii) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{ln(x)}{x}=0$	**(iv)** $\lim\limits_{x\to0^+}xln(x)=0$

<u>Preuves</u> :

(i) En observant la courbe de $\frac{e^x}{x}$ sur la calculatrice (habitude à prendre), on peut conjecturer que $\frac{e^x}{x}$ tend vers $+\infty$ en $+\infty$. Il s'agit à présent de lever l'indétermination afin de prouver cette conjecture. Une méthode classique consiste à minorer la fonction, ici $\frac{e^x}{x}$ par une fonction $f(x)$ tendant vers $+\infty$. Le théorème des gendarmes nous permet alors de conclure que notre fonction tend vers $+\infty$ en $+\infty$.

Le cheminement : nous serions plutôt satisfaits par exemple que pour x suffisamment grand $\frac{e^x}{x} > x$. Ce qui signifierait que $e^x > x^2$ ou encore que $e^x - x^2 > 0$ à pour x suffisamment grand.
Soit $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = e^x - x^2$. Alors $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = e^x - 2x$ et même $f''(x) = e^x - 2$.
Or $e^x - 2 > 0 \Longrightarrow x > ln(2)$. On en déduit que f' est strictement croissante sur $]ln(2); +\infty[$.
Très bien mais encore ? Bien, $f'\big(ln(2)\big) = e^{ln(2)} - 2ln(2) = 2 - 2ln(2) \approx 0{,}614 > 0$.
Par stricte croissance de f' sur $]ln(2); +\infty[$, on en déduit que $\forall x \in [ln(2); +\infty[, f'(x) > 0$. Par conséquent, f est strictement croissante sur $[ln(2); +\infty[$.
Pareillement, on constate que $f\big(ln(2)\big) = 2 - ln(2)^2 > 0$. Il vient que $\forall x \in [ln(2); +\infty[, f(x) > 0$.
D'où $\forall x \in [ln(2)\,; +\infty[: f(x) = e^x - x^2 > 0 \Rightarrow e^x > x^2 \Longrightarrow \frac{e^x}{x} > x$.
Or $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$. Conclusion, d'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$.

Remarque ! On retiendra bien ces petites astuces tout à fait intéressantes et surtout très pratiques :

- Pour le lever une indétermination (sur une limite), on peut penser à minorer la fonction par une autre (ou encore à l'encadrer par deux autres) afin de pouvoir appliquer le théorème des gendarmes.
- Pour minorer (ou encadrer), on peut penser à étudier le signer de la différence (ici $e^x - x^2$) puis minorer (ou majorer) en se servant de la stricte croissance (ou décroissance) de la différence. Magie ! On obtient l'inégalité ou l'encadrement voulu.

(ii) Pour prouver que $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x = 0$, on peut s'apercevoir que cette limite ressemble à la précédente et essayer de bidouiller un peu. Reste à faire apparaître du $\frac{e^x}{x}$ là-dedans…

$\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x = \lim\limits_{x\to+\infty} -xe^{-x} = \lim\limits_{x\to+\infty} -\frac{x}{e^x} = \lim\limits_{x\to+\infty} -\frac{1}{\frac{e^x}{x}}$.

Or on sait que $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$. D'où $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x = \lim\limits_{x\to+\infty} -\frac{1}{\frac{e^x}{x}} = 0$.

(iii) On pressent que pour prouver que $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{ln(x)}{x} = 0$, il va falloir passer par un procéder similaire à celui utilize en (i). Et c'est vrai ! En revanche, cette fois-ci, on souhaite que cela tende vers 0. Il va donc non plus falloir minorer mais encadrer et surtout majorer.
Le cheminement : nous serions plutôt satisfaits cette fois-ci que pour x suffisamment grand, on ait l'encadrement $0 < \frac{ln(x)}{x} < \frac{1}{\sqrt{x}}$. Comme on a $x = \sqrt{x}\sqrt{x}$, cela signifierait que $0 < ln(x) < \sqrt{x}$.
On cherche donc à montrer que $0 < ln(x) < \sqrt{x}$ pour x suffisamment grand. L'inégalité de gauche ne pose aucun problème. Nous savons que $\forall x \in \mathbb{R}, x > 1 \Longrightarrow ln(x) > 0$.
Soit $\forall x \in \mathbb{R}_*^+, f(x) = ln(x) - \sqrt{x}$. Alors $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{2-\sqrt{x}}{2x}$.
$f'(x) = \frac{2-\sqrt{x}}{2x} < 0 \Longrightarrow 2 - \sqrt{x} < 0 \Longrightarrow \sqrt{x} > 2 \Longrightarrow x > 4$. Par conséquent, f est strictement décroissante sur $]4; +\infty[$. On a par exemple $f(4) = ln(4) - \sqrt{4} = 2ln(2) - 2 \approx -0{,}614 < 0$.
Par stricte décroissance de f sur $]4; +\infty[$, on a $f(x) = ln(x) - \sqrt{x} < 0$ pour tout $x \in\,]4; +\infty[$.

D'où, pour tout $x \in]4;+\infty[$: $ln(x) - \sqrt{x} < 0 \Rightarrow ln(x) < \sqrt{x} \Rightarrow \frac{ln(x)}{x} < \frac{\sqrt{x}}{x} = \frac{1}{\sqrt{x}}$.

On a donc $0 < \frac{ln(x)}{x} < \frac{1}{\sqrt{x}}$ pour tout $x \in]4;+\infty[$.

Or $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$. D'après le théorème des gendarmes, on conclut que $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{ln(x)}{x} = 0$.

(iv) La démonstration suivante s'apparente à la (ii) comme on peut s'y attendre. Il faut cette fois-ci bidouiller un peu afin de se servir de la propriété (iii) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{ln(x)}{x} = 0$.

$$\lim_{x\to0^+} xln(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} ln\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\left(\underbrace{ln(1)}_{=0} - ln(x)\right) = \lim_{x\to+\infty} -\frac{ln(x)}{x} = 0$$

Ces propriétés permettent de prouver des propriétés plus générales :

(i) $\forall m,n \in \mathbb{R}^+, \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^{mx}}{x^n} = +\infty$	**(ii)** $\forall m,n \in \mathbb{R}^+, \lim\limits_{x\to-\infty} x^m e^{nx} = 0$
(iii) $\forall m,n \in \mathbb{R}^+, \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{ln(x)^m}{x^n} = 0$	**(iv)** $\forall m,n \in \mathbb{R}^+, \lim\limits_{x\to0^+} x^m ln(x)^n = 0$

Avertissement ! Les formules ci-dessus ne sont pas à retenir en terminale. Les plus aventureux peuvent bien entendu les retenir s'ils le souhaitent.

6. Généralisation

6.1. Introduction

Jusqu'ici, nous avons étudier le logarithme et l'exponentielle naturels, c'est-à-dire le logarithme de base e et l'exponentielle de base e en ce sens que e n'est rien d'autre qu'un nombre comme nous l'avons dit. On a d'ailleurs $e \approx 2{,}71828$. En fait, rien n'empêche de créer des logarithmes et exponentielles de base quelconques.

Les physiciens utilisent par exemple beaucoup le logarithme de base 10. En particulier, la notion même de décibel dont vous avez peut-être entendu parler utilise le logarithme base 10. Quant aux informaticiens, très binaires, ils sont très friands du logarithme base 2 !

Avertissement ! Ce qui suit est hors programme de terminale S.

6.2. Exponentielle et logarithme de base quelconque

On appelle exponentielle de base a (avec $a > 0$) la fonction $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = a^x$
On appelle logarithme de base a (avec $a > 0$), noté log_a la fonction $\forall x \in \mathbb{R}, log_a(x) = \frac{ln(x)}{ln(a)}$

On remarquera que a^x est la réciproque de $log_a(x)$, ce qui se traduit par les propriétés suivantes :

(i) $\forall a, x \in \mathbb{R}^+, a^{log_a(x)} = x$	**(ii)** $\forall x \in \mathbb{R}, a \in \mathbb{R}^+, log_a(a^x) = x$

Preuves :

(i) $\forall a, x \in \mathbb{R}^+,\ a^{log_a(x)} = a^{\frac{ln(x)}{ln(a)}} = \left(e^{ln(a)}\right)^{\frac{ln(x)}{ln(a)}} = e^{ln(a)\frac{ln(x)}{ln(a)}} = e^{ln(x)} = x$

(ii) $\forall x \in \mathbb{R}, a \in \mathbb{R}^+, log_a(a^x) = \frac{ln(a^x)}{ln(a)} = \frac{xln(a)}{ln(a)} = x$