Cours : fiche n°7 - Nombres complexes

Thème : les nombres complexes, écritures et opérations.

1. Notation algébrique et propriétés

1.1. Qu'est-ce qu'un nombre complexe ?

Il existe divers ensembles de nombres : $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$. À partir de l'ensemble des réels, on peut construire l'ensemble des nombres complexes. Cet ensemble est noté $\mathbb{C}$ et on a : $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

On introduit i tel que $i^2 = -1$. Magnifique ! Nous avons « créé » un carré positif ! Impossible ? En fait, un carré n'est pas forcément positif, la règle exacte est : le carré de tout nombre réel est positif.

L'ensemble des nombres complexes, noté $\mathbb{C}$, est l'ensemble des nombres z s'écrivant sous la forme suivante : $z = a + ib$ avec i tel que $i^2 = -1$, $a, b \in \mathbb{R}$. Cette notation est qualifiée de forme algébrique.
Soit $z = a + ib \in \mathbb{C}$: Le nombre réel a est appelé partie réelle de z et on note : $Re(z) = a$. Le nombre réel b est appelé partie imaginaire de z et on note : $Im(z) = b$. Si $a = 0$, on dit que z est un imaginaire pur.

1.2. Opérations sur les nombres complexes

Partant de la précédente définition, nous pouvons munir l'ensemble $\mathbb{C}$ de plusieurs opérations :

Conjugaison : soit $z = a + ib$ un nombre complexe. Le conjugué de z est $\bar{z} = a - ib$
Addition : soient $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$ deux nombres complexes. $z + z' = (a + a') + i(b + b')$ ou encore $z + z' = (Re(z) + Re(z')) + i(Im(z) + Im(z'))$ *N.B. : cette addition est commutative, i.e. : $z + z' = z' + z$. Son élément neutre est 0, i.e. : $0 + z = z$. Elle est associative, i.e. : $(z + z') + z'' = z + (z' + z'')$. N'hésitez pas à vérifier !*

Multiplication : soient $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$ deux nombres complexes.
$zz' = (a + ib)(a' + ib') = aa' + aib' + iba' + ibib' = aa' + iab' + iba' - bb'$
$zz' = (aa' - bb') + i(ab' + ba')$
N.B. : cette multiplication est commutative, i.e. : $zz' = z'z$. Son élément neutre est 1, i.e. : $1 \times z = z$ et son élément absorbant 0, i.e. : $0 \times z = 0$. Elle est associative, i.e. : $(zz')z'' = z(z'z'')$ et distributive par rapport à l'addition, à savoir que : $z(z' + z'') = zz' + zz''$). N'hésitez pas à vérifier !

Multiplication par un scalaire : soit $z = a + ib$ un nombre complexe et soit k un réel.
$kz = (ka) + i(kb)$

Egalité : soient $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$ deux nombres complexes.
On dit que $z = z'$ si et seulement si $a = a'$ et $b = b'$.

Exemple : soient $z = \frac{5+i}{2}$ et $z' = \frac{2}{3} + i$ deux nombres complexes.

On a : $z = \frac{5+i}{2} = \frac{5}{2} + \frac{1}{2}i$.

Les conjugués de z et z' sont respectivement : $z = \frac{5}{2} - \frac{1}{2}i$ et $z' = \frac{2}{3} - i$.

La somme de z et z' est : $z + z' = \frac{5}{2} + \frac{1}{2}i + \frac{2}{3} + i = \left(\frac{5}{2} + \frac{2}{3}\right) + \left(\frac{1}{2} + 1\right)i = \frac{19}{6} + \frac{3}{2}i$.

Le produit de z et z' est : $zz' = \left(\frac{5}{2} + \frac{1}{2}i\right)\left(\frac{2}{3} + i\right) = \left(\frac{5}{2} \times \frac{2}{3} - \frac{1}{2} \times 1\right) + \left(\frac{5}{2} \times 1 + \frac{1}{2} \times \frac{2}{3}\right)i = \frac{7}{6} + \frac{17}{6}i$.

Autre exemple : mettre $z = \frac{5+i}{7-2i}$ sous forme algébrique.

L'astuce classique et à retenir est de multiplier le numérateur et le dénominateur par la quantité conjuguée du dénominateur, en l'occurrence $7 + i$:

$$z = \frac{5 + i}{7 - 2i} = \frac{(5 + i)(7 + 2i)}{(7 - 2i)(7 + 2i)} = \frac{35 + 10i + 7i - 2}{7^2 - (2i)^2} = \frac{33 + 17i}{49 + 4} = \frac{33}{53} + \frac{17}{53}i$$

1.3. Propriétés

De la définition des précédentes opérations, l'on déduit les propriétés suivantes :

(i) Soit $z \in \mathbb{C}$, alors : $z\bar{z} = Re(z)^2 + Im(z)^2$

(ii) Soit $z \in \mathbb{C}$, alors : $z + \bar{z} = 2Re(z)$

Preuves : z peut s'écrire sous la forme $z = a + ib$ avec $a, b \in \mathbb{R}$ et $i^2 = -1$. Dès lors, $\bar{z} = a - ib$ par définition du nombre conjugué.

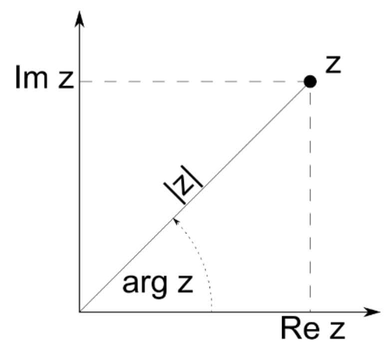
(i) $z\bar{z} = (a + ib)(a - ib) = a^2 - (ib)^2 = a^2 - i^2b^2 = a^2 + b^2$
(ii) $z + \bar{z} = a + ib + a - ib = a + a = 2a$

2. Notation trigonométrique et propriétés

2.1. Interprétation géométrique et notation trigonométrique

Une manière commode de représenter un nombre complexe z, c'est de la visualiser sur ce qu'on appelle le plan complexe qui s'apparente à un simple repère orthonormé. De fait, on constate qu'un nombre complexe s'apparente à un vecteur. En effet, on peut considérer que :

- Le nombre 0 correspond au vecteur $\overrightarrow{(0{,}0)}$;
- Le nombre 1 correspond au vecteur $\overrightarrow{(1{,}0)}$;
- Le nombre i correspond au vecteur $\overrightarrow{(0{,}1)}$;
- Plus généralement, le nombre $z = a + ib$ s'apparente au vecteur $\overrightarrow{(a,b)}$;
- Pareillement, l'addition de nombres complexes et la multiplication d'un nombre complexe par un scalaire s'apparentent à leurs homologues vectoriels. Soient $\overrightarrow{(a,b)}$ et $\overrightarrow{(a',b')}$ deux vecteurs, k un réel, on a bien : $\overrightarrow{(a,b)} + \overrightarrow{(a',b')} = \overrightarrow{(a+a',b+b')}$ et $k\overrightarrow{(a,b)} = \overrightarrow{(ka,kb)}$;

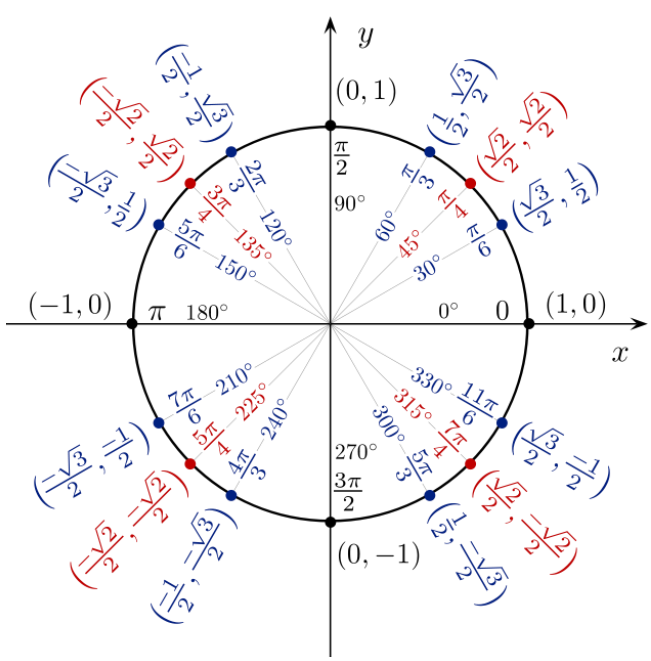


A gauche, on a représenté le nombre complexe z dans le plan complexe. On représente la partie réelle sur l'axe des abscisses et la partie imaginaire sur l'axe des ordonnées.

De l'analogie (voire de l'équivalence) entre vecteurs et nombres complexes, on tire de nouvelle caractéristique des nombres complexes :

On appelle module de z la quantité : $|z| = \sqrt{Re(x)^2 + Im(x)^2} = \sqrt{a^2 + b^2}$

On appelle argument de z l'angle orienté : $arg(z) = \left(\overrightarrow{(0; Re(z))}; \overrightarrow{(Re(z); Im(z))}\right)$



Remarque !

A partir de cette interprétation géométrique précédente, on peut formuler quelques remarques.

Tout d'abord, on notera que l'ensemble des nombre $z \in \mathbb{C}$ de module $|z| = 1$ décrit le cercle de centre l'origine du plan complexe et de rayon 1, c'est-à-dire le cercle de trigonométrique.

Plus généralement, un nombre complexe $z \in \mathbb{C}$ de module $|z|$ peut toujours se visualiser comme un point du cercle de centre le plan complexe et de rayon $|z|$.

Ceci nous donne à voir les nombres complexes d'une façon très trigonométrique. On en déduit les propriétés formulées ci-après.

2.2. Propriétés

(i) Soit $z \in \mathbb{C}$, on note $\theta = arg(z)$, alors : $Re(z) = |z|cos(\theta)$ et $Im(z) = |z|sin(\theta)$

(ii) Soit $z \in \mathbb{C}$, z peut s'écrire sous la forme $z = r\big(cos(\theta) + isin(\theta)\big)$ avec $r, \theta \in \mathbb{R}$. Cette notation est qualifiée de forme trigonométrique ou forme polaire.

(iii) Soit $z = a + ib \in \mathbb{C}$, on note $\theta = arg(z)$, alors $cos(\theta) = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ et $sin(\theta) = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$

(iv) Soit $z, z' \in \mathbb{C}$ avec $z = r\big(cos(\theta) + isin(\theta)\big)$ et $z' = r'\big(cos(\theta') + isin(\theta')\big)$, alors :
$zz' = rr'\big(cos(\theta + \theta') + isin(\theta + \theta')\big)$.

Justifications : z peut s'écrire sous la forme $z = a + ib$ avec $a, b \in \mathbb{R}$ et $i^2 = -1$. Dès lors, $\bar{z} = a - ib$ par définition du nombre conjugué.

(i) Par construction (voir graphique précédent), on a : $cos\big(arg(z)\big) = \frac{Re(z)}{|z|}$ et $sin\big(arg(z)\big) = \frac{Im(z)}{|z|}$.

(ii) D'après (i), en posant $\theta = arg(z)$ et $r = |z|$, on a :
$z = a + ib = |z|cos(\theta) + i|z|sin(\theta) = r\big(cos(\theta) + isin(\theta)\big)$.

(iii) $cos(\theta) = \frac{Re(z)}{|z|} = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ et $sin(\theta) = \frac{Im(z)}{|z|} = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

(iv) On rappelle que pour tous réels θ et θ' :
$cos(\theta + \theta') = cos(\theta)cos(\theta') - sin(\theta)sin(\theta')$ et $sin(\theta + \theta') = sin(\theta)cos(\theta') + cos(\theta)sin(\theta')$
Il vient que :
$zz' = r\big(cos(\theta) + isin(\theta)\big) \times r'\big(cos(\theta') + isin(\theta')\big)$
$\Rightarrow zz' = rr'\big(cos(\theta)cos(\theta') + icos(\theta)sin(\theta') + isin(\theta)cos(\theta') - sin(\theta)sin(\theta')\big)$
$\Rightarrow zz' = rr'\Big(\big(cos(\theta)cos(\theta') - sin(\theta)sin(\theta')\big) + i\big(cos(\theta)sin(\theta') + sin(\theta)cos(\theta')\big)\Big)$
$\Rightarrow zz' = rr'\big(cos(\theta + \theta) + isin(\theta + \theta')\big)$

Exemple : soient $z = \frac{-1+i}{\sqrt{2}}$ et $z' = \frac{5\sqrt{3}+15i}{2\sqrt{3}}$ deux nombres complexes. Mettre z et z' sous forme trigonométrique et leur somme sous forme algébrique.

- Mettre z sous forme trigonométrique :

$z = \frac{-1+i}{\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i = -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}\sqrt{2}}i = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$. Or $cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.
D'où : $z = cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + isin\left(\frac{3\pi}{4}\right)$

- Mettre z' sous forme trigonométrique :

$z' = \frac{5\sqrt{3}+15i}{2\sqrt{3}} = \frac{5\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} + \frac{5\sqrt{3}\sqrt{3}i}{2\sqrt{3}} = \frac{5}{2} + \frac{5\sqrt{3}}{2}i = 5\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$. Or $cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$, $sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.
D'où : $z = 5\left(cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + isin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)$

- Mettre leur somme sous forme algébrique :

$$z + z' = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i + \frac{5}{2} + \frac{5\sqrt{3}}{2}i = \frac{5 - \sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2} + 5\sqrt{3}}{2}i$$

Remarque ! Pour passer de la forme algébrique à la forme « trigo », on essaie de faire apparaître un cosinus et un sinus remarquables (à retenir).

3. Notation exponentielle et propriétés

3.1. Notation exponentielle

Nous admettrons le résultat qui suit, lequel peut être démontré grâce à une notion hors programme, celle de développement en série de Taylor :

Soit $\theta \in \mathbb{R}$, on montre que : $cos(\theta) + isin(\theta) = e^{i\theta}$.

En multipliant chacun des membres de cette égalité par, $r \in \mathbb{R}$, nous obtenons une nouvelle notation des nombres complexes :

Soit $z \in \mathbb{C}$, il existe $r, \theta \in \mathbb{R}$ tel que $z = r\big(cos(\theta) + isin(\theta)\big) = re^{i\theta}$.
Comme précisé précédemment, $r\big(cos(\theta) + isin(\theta)\big)$ est l'écriture de z sous forme trigonométrique.
La notation $re^{i\theta}$ est l'écriture sous forme exponentielle de z.

Remarque ! Là encore $z = cos(\theta) + isin(\theta) = e^{i\theta}$ s'interprète comme l'ensemble des points du cercle de l'unité, $\theta = arg(z)$ représentant un simple angle orienté.

<u>Exemple</u> : soient $z = \frac{-1+i}{\sqrt{2}}$ et $z' = \frac{5\sqrt{3}+15i}{2\sqrt{3}}$ deux nombres complexes. Mettre z et z' sous forme exponentielle.

Nous avons déjà montré que $z = cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + isin\left(\frac{3\pi}{4}\right)$ et $z' = 5\left(cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + isin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)$.

D'où : $z = e^{\frac{3\pi}{4}i}$ et $z' = 5e^{\frac{\pi}{3}i}$.

<u>Autre exemple</u> : soit $z = 12e^{\frac{11\pi i}{6}}$ un nombre complexe. Mettre z sous forme algébrique.

On a : $z = 12e^{\frac{11\pi i}{6}} = 12\left(cos\left(\frac{11\pi}{6}\right) + isin\left(\frac{11\pi}{6}\right)\right) = 12\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right) = 6\sqrt{3} - 6i$

3.2. Propriétés

A partir de la notation exponentielle, nous pouvons construire quelques propriétés :

Module et argument d'un produit : soit $z, z' \in \mathbb{C}$.
Alors, on a : $|zz'| = |z||z'|$ et $arg(zz') = arg(z) + arg(z')$.

Module et argument d'un inverse : soit $z \in \mathbb{C}$.
Alors, on a : $\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}$ et $arg\left(\frac{1}{z}\right) = -arg(z)$.

Module et argument d'un quotient : soit $z, z' \in \mathbb{C}$.
Alors, on a : $\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}$ et $arg\left(\frac{z}{z'}\right) = arg(z) - arg(z')$.

Module et argument d'une puissance : soit $z \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}$.
Alors, on a : $|z^n| = |z|^n$ et $arg(z^n) = narg(z)$.

Module et argument du conjugué inverse : soit $z \in \mathbb{C}$.
Alors, on a : $|\bar{z}| = |z|$ et $arg(\bar{z}) = -arg(\bar{z})$.
N.B. : dans le plan complexe, z et $\bar{z}$ sont symétriques par rapport à l'axe de des abscisses.

Module et argument de l'opposé : soit $z \in \mathbb{C}$.
Alors, on a : $|-z| = |z|$ et $arg(-z) = arg(z) + \pi$.
N.B. : dans le plan complexe, z et $\bar{z}$ sont symétriques par rapport à l'origine.

Formule de Moivre : soient $\theta \in \mathbb{R}$, $z \in \mathbb{C}$ avec $z = re^{i\theta}$ et $n \in \mathbb{N}$.
Alors : $\left(cos(\theta) + isin(\theta)\right)^n = cos(n\theta) + isin(n\theta)$

Formules d'Euler : soit $\theta \in \mathbb{R}$.
Alors : $cos(\theta) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$ et $sin(\theta) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$

<u>Preuves</u> :

- Module et argument d'un produit :

Soit $z, z' \in \mathbb{C}$, on peut écrire $z = |z|e^{iarg(z)}$ et $z' = |z'|e^{iarg(z')}$ (on passe en notation exponentielle).

Il vient que $zz' = |z|e^{iarg(z)}|z'|e^{iarg(z')} = |z||z'|e^{i\left(arg(z)+arg(z')\right)}$.

Par identification, on a bien $|zz'| = |z||z'|$ et $arg(zz') = arg(z) + arg(z')$.

- Module et argument d'un inverse :

Une fois encore, on note $z = |z|e^{iarg(z)}$ et $z' = |z'|e^{iarg(z')}$

Il vient que $\frac{1}{z} = \frac{1}{|z|e^{iarg(z)}} = \frac{1}{|z|} \times \frac{1}{e^{iarg(z)}} = \frac{1}{|z|}e^{-iarg(z)}$.

- Module et argument d'un quotient :

On peut procéder comme ci-dessus ou classiquement remarquer que $\frac{z}{z'} = z \times \frac{1}{z'}$. On applique alors les deux formules précédentes :

$$\left|\frac{z}{z'}\right| = \left|z \times \frac{1}{z'}\right| = |z|\left|\frac{1}{z'}\right| = |z|\frac{1}{|z'|} = \frac{|z|}{|z'|}$$

$$arg\left(\frac{z}{z'}\right) = arg\left(z \times \frac{1}{z'}\right) = arg(z) + arg\left(\frac{1}{z'}\right) = arg(z) - arg(z')$$

- Module et argument d'une puissance :

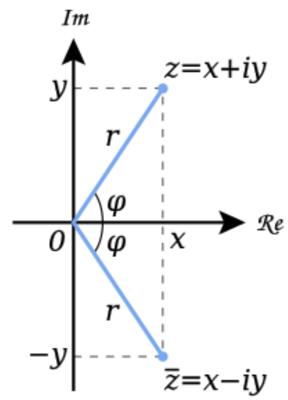
Intuitivement, on a :

$$|z^n| = \overbrace{|z| \times |z| \times \ldots \times |z|}^{n\ fois} = \prod_{k=1}^{n}|z| = |z|^n$$

$$arg(z^n) = \overbrace{arg(z) + arg(z) + \cdots + arg(z)}^{n\ fois} = narg(z)$$

Plus formellement, essayez-vous à prouver ces formules par récurrence.

- Module et argument du conjugué :



Graphiquement, cette propriété est assez évidente. Il suffit de tracer un nombre complexe z et son conjugué $\bar{z}$ dans le plan pour s'en rendre compte (graphique représenté à droite, extrait de Wikipédia).
Notons : $z = r\big(cos(\theta) + isin(\theta)\big) = rcos(\theta) + irsin(\theta)$
Où : r est le module de z et θ son argument.
Rappelons que : $cos(\theta) = cos(-\theta)$ et $sin(-\theta) = -sin(\theta)$.
Il vient : $\bar{z} = rcos(\theta) - irsin(\theta) = rcos(-\theta) + isin(-\theta) = r\big(cos(-\theta) + isin(-\theta)\big)$.
On a donc bien : $|\bar{z}| = r = |z|$ et $arg(\bar{z}) = -\theta = -arg(z)$.

- Module et argument du conjugué :

Graphiquement, cette propriété est elle-aussi évidente. Il suffit de tracer un nombre complexe z et son opposé $-z$ dans le plan pour s'en apercevoir.
Notons : $z = r\big(cos(\theta) + isin(\theta)\big) = rcos(\theta) + irsin(\theta)$
Où : r est le module de z et θ son argument.
Rappelons que : $cos(\theta + \pi) = -cos(\theta)$ et $sin(\theta + \pi) = -sin(\theta)$.
Il vient : $-z = -rcos(\theta) - irsin(\theta) = rcos(\theta + \pi) + isin(\theta + \pi) = r\big(cos(\theta + \pi) + isin(\theta + \pi)\big)$.
On a donc bien : $|-z| = r = |z|$ et $arg(-z) = \theta + \pi = arg(z) + \pi$.
Autre preuve (plus rapide) : $|-z| = |-1||z| = |z|$ et $arg(-z) = arg(-1) + arg(z) = \pi + arg(z)$.

- Formule de Moivre :

$$\big(cos(\theta) + isin(\theta)\big)^n = \left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta} = cos(n\theta) + isin(n\theta)$$

- Formules d'Euler :

Rappelons encore que : $cos(\theta) = cos(-\theta)$ et $sin(-\theta) = -sin(\theta)$.

$$\frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} = \frac{cos(\theta) + isin(\theta) + cos(-\theta) + isin(-\theta)}{2} = \frac{cos(\theta) + isin(\theta) + cos(\theta) - isin(\theta)}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} = \frac{2cos(\theta)}{2} = cos(\theta)$$

$$\frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} = \frac{cos(\theta) + isin(\theta) - cos(-\theta) - isin(-\theta)}{2} = \frac{cos(\theta) + isin(\theta) - cos(\theta) + isin(\theta)}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} = \frac{2isin(\theta)}{2i} = sin(\theta)$$

- Conclusion : de ces démonstrations, comme de bien d'autres d'ailleurs, on retiendra en particulier toutes les petites « astuces » utilisées, par exemple le fait d'écrire un nombre complexe avec la notation qui nous arrange quand cela nous arrange, la tentation de procéder à une démonstration par récurrence quand un petit nombre entier n traine dans une formule, l'utilisation du fait que sinus et cosinus sont respectivement des fonctions impaires et paires, etc. Toute astuce est toujours bonne à prendre et surtout à retenir !

Attention ! La connaissance des formules d'Euler et de la formule de Moivre, bien utiles, n'est plus exigée en terminale. Malgré tout, les futurs étudiants que vous êtes peut-être ont potentiellement intérêt à la connaître d'ores et déjà.

<u>Exemple</u> : calculer le module et l'argument du nombre complexe $z = \frac{3+3i}{-6-2\sqrt{3}i}$.

Idée : représenter $3+3i$ et $-6-2\sqrt{3}i$ dans le plan complexe.

$$|z| = \left|\frac{3+3i}{-6-2\sqrt{3}i}\right| = \frac{|3+3i|}{|-6-2\sqrt{3}i|} = \frac{|3+3i|}{|6+2\sqrt{3}i|} = \frac{\sqrt{3^2+3^2}}{\sqrt{6^2+\left(2\sqrt{3}\right)^2}} = \frac{\sqrt{18}}{\sqrt{48}} = \frac{3\sqrt{2}}{4\sqrt{3}}$$

$$arg(z) = arg\left(\frac{3+3i}{-6-2\sqrt{3}i}\right) = arg(3+3i) - arg\left(-6-2\sqrt{3}i\right) = arg(3+3i) - arg\left(6+2\sqrt{3}i\right) - \pi$$

$$arg(z) = arg\left(3\sqrt{2}\left(\frac{3}{3\sqrt{2}} + \frac{3}{3\sqrt{2}}i\right)\right) - arg\left(4\sqrt{3}\left(\frac{6}{4\sqrt{3}} + \frac{2\sqrt{3}}{4\sqrt{3}}i\right)\right) - \pi$$

Or : $\frac{3}{3\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\frac{6}{4\sqrt{3}} = \frac{3}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\frac{2\sqrt{3}}{4\sqrt{3}} = \frac{1}{2}$

$$arg(z) = arg\left(3\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)\right) - arg\left(2\sqrt{21}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)\right) - \pi$$

$$arg(z) = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6} - \pi = \frac{6\pi-4\pi-24\pi}{24} = \frac{-22\pi}{24} = -\frac{11\pi}{12}$$

Comme $arg(z)$ est un angle, on rappelle que : $\forall k \in \mathbb{Z}, arg(z) = arg(z) + 2k\pi$. On peut donc écrire :

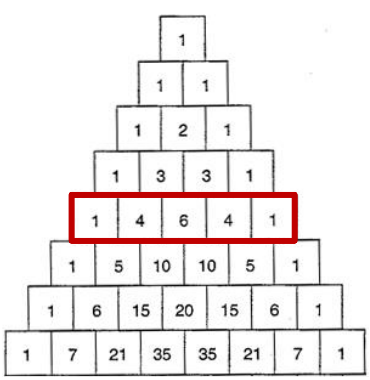
$$arg(z) = -\frac{11\pi}{12} + 2\pi = \frac{-11\pi+24\pi}{12} = \frac{13\pi}{12}$$

<u>Autre exemple</u> : montrer qu'il est possible d'écrire $cos(5x)^4$ et $sin(10x)^2$ à l'aide uniquement d'une dont les termes sont de la forme $cos(ax)$ ou $sin(bx)$.

N.B. : cette transformation est appelée une linéarisation. Elle est particulièrement utile afin de pouvoir facilement intégrer une fonction contenant des sinus et cosinus, c'est-à-dire en outre afin de pouvoir trouver la primitive d'une fonction constituée de sinus et de cosinus. La connaissance de cette méthode n'est plus au programme de terminale.

On rappelle que : $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n-k}$. Cette formule est appelée binôme de Newton et les coefficients $\binom{n}{k}$ peuvent être facilement trouvés à l'aide du triangle de Pascal.

- $cos(5x)^4$: on applique les formules d'Euler puis on utilise le binôme de Newton.



$$cos(5x)^4 = \left(\frac{e^{5xi}+e^{-5xi}}{2}\right)^4 = \frac{\left(e^{5xi}+e^{-5xi}\right)^4}{16}$$

$$\left(e^{5xi}+e^{-5xi}\right)^4 = 1\left(e^{5xi}\right)^4 + 4\left(e^{5xi}\right)^3\left(e^{-5xi}\right)^1 + 6\left(e^{5xi}\right)^2\left(e^{-5xi}\right)^2 + 4\left(e^{5xi}\right)^1\left(e^{-5xi}\right)^3 + 1\left(e^{-5xi}\right)^4$$

$$\left(e^{5xi}+e^{-5xi}\right)^4 = e^{20xi} + 4e^{15xi-5xi} + 6e^{10xi-10xi} + 4e^{5xi-15xi} + e^{-20xi}$$

$$cos(5x)^4 = \frac{e^{20xi}+4e^{10xi}+6e^{0}+4e^{-10xi}+e^{-20xi}}{16}$$

Finalement on a : $cos(5x)^4 = \frac{1}{8}\frac{e^{20xi}+e^{-20xi}}{2} + \frac{1}{2}\frac{e^{10xi}+e^{-10xi}}{2} + \frac{3}{8} = \frac{1}{8}cos(20x) + \frac{1}{2}cos(10x) + \frac{3}{8}$.

- $sin(10x)^2$: dans ce cas particulier, on se contentera d'utiliser une formule de trigonométrie, à savoir que $\forall x \in \mathbb{R}, sin(x)^2 = \frac{1-cos(2x)}{2}$

Prouvons toutefois cette formule afin qu'elle n'ait pas l'air d'être sortie de nulle part :

$cos(2a) \ = \ cos(a+a) = cos(a)cos(a) - sin(a)sin(a) = \ cos(a)^2 - sin(a)^2$

$=> \ sin(a)^2 = cos(a)^2 - cos(2a) = 1 - sin(a)^2 - cos(2a)$

$=> \ 2sin(a)^2 = 1 - cos(2a)$

$=> \ sin(a)^2 = \dfrac{1 - cos(2a)}{2}$

On en déduit que : $sin(10x)^2 = \frac{1-cos(2\times 10x)}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}cos(20x)$.

3.3. <u>Racines n-ième de l'unité</u>

Comme vous le savez on définit la racine carrée en tant que réciproque de la fonction carrée, c'est-à-dire que pour tout x réel positif, voire pour tout x complexe, le carré de racine de x est égal à x.

Plus formellement, avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, on a : $\forall x \in \mathbb{K}, \left(\sqrt{x}\right)^2 = \left(x^{\frac{1}{2}}\right)^2 = x^{\frac{2}{2}} = x$.

Pareillement, on peut définir la racine n-ième de x, notée $\sqrt[n]{x}$, en tant que réciproque de x^n.

Formellement, on a : $\forall x \in \mathbb{K}, \left(\sqrt[n]{x}\right)^n = \left(x^{\frac{1}{n}}\right)^n = x^{\frac{n}{n}} = x$.

Dans le plan complexe, chercher les racines n-ième de l'unité signifie qu'on cherche à résoudre l'équation suivante : soit $z \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}$ $(E) : z^n = 1$.

Si $z^n = 1$, on a nécessairement $|z^n| = |z|^n = |1| = 1$. On en déduit que $|z| = 1$. Par conséquent, z peut s'écrire sous la forme $e^{i\theta}$. Comme θ est un angle, on a naturellement $\forall k \in \mathbb{Z}, e^{i\theta} = e^{i(\theta+2k\pi)}$.

Or $e^x = 1$ si et seulement si $x = 0$. Donc $e^{i\theta} = 1 \Leftrightarrow \theta = 0 + 2k\pi$.

De ce fait $\forall n \in \mathbb{N}, z^n = 1 \Leftrightarrow \left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta} = 1 \Leftrightarrow n\theta = 0 + 2k\pi \Leftrightarrow \theta = \frac{2k\pi}{n}$.

> L'ensemble des solutions de l'équation $(E) : z^n = 1$, avec $z \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}$, appelé racines n-ième de l'unité, est : $S = e^{i\frac{2k\pi}{n}}$.

4. Equations du second degré

4.1. <u>Solutions complexes des équations du second degré à coefficients réels</u>

Vous savez très certainement déterminer qu'une équation du second degré n'a aucune solution, en a une ou plusieurs. Il s'agit des équations de la forme : $ax^2 + bx + c = 0$ avec $a, b, c, x \in \mathbb{R}$. Si votre mémoire flanche, je vous invite à consulter la fiche de cours n°1 afin de vous rafraîchir la mémoire. Nous nous intéressons à présent aux solutions x où $x \in \mathbb{C}$ et non plus $x \in \mathbb{R}$.

On appelle équation du second degré complexe à coefficients réels une équation de la forme :
(E) : $ax^2 + bx + c = 0$ avec $a, b, c \in \mathbb{R}$ et $x \in \mathbb{C}$.

Avec les nombres complexes, tout carré n'est pas nécessairement positif. Si bien que les solutions complexes de (E) ($x \in \mathbb{C}$) diffèrent des solutions réelles ($x \in \mathbb{R}$).

On appelle discriminant réduit la quantité δ telle que $\delta^2 = b^2 - 4ac$.
Soit $\Delta = b^2 - 4ac$. Si $\Delta \geq 0$ alors $\delta = \sqrt{\Delta}$, sinon $\delta = i\sqrt{-\Delta}$.
N.B. : le discriminant réduit δ est « l'équivalent complexe » du discriminant Δ auquel vous êtes habitué. Dans le cas particulier où $\Delta = 0$, on a $\delta = 0$.

On vérifie aisément que l'ensemble S des solutions de l'équation sont :

Si $\Delta > 0$, $S = \left\{\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}; \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right\}$
Si $\Delta = 0$, $S = \left\{\frac{-b}{2a}\right\}$
Si $\Delta < 0$, $S = \left\{\frac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a}; \frac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a}\right\}$

Ce qu'on peut en fait résumer par : $\boxed{S = \frac{-b \pm \delta}{2a}}$

<u>Preuve</u> : soient $\alpha = \frac{-b+\delta}{2a}$ et $\beta = \frac{-b-\delta}{2a}$ et soient $a, b, c \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{C}$.

On constate que :

$$ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}\right)\right) = a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right)\right)$$

$$\Rightarrow ax^2 + bx + c = a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\delta^2}{(2a)^2}\right) = a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\delta}{2a}\right)^2\right)$$

$$\Rightarrow ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a} + \frac{\delta}{2a}\right)\left(x + \frac{b}{2a} - \frac{\delta}{2a}\right) = a\left(x + \frac{b+\delta}{2a}\right)\left(x + \frac{b-\delta}{2a}\right)$$

$$\Rightarrow ax^2 + bx + c = a\left(x - \frac{-b-\delta}{2a}\right)\left(x - \frac{-b+\delta}{2a}\right) = a(x-\beta)(x-\alpha)$$

D'où :

$ax^2 + bx + c = 0 \iff (x-\alpha) = 0$ ou $(x-\beta) = 0 \iff x = \alpha$ ou $x = \beta$.

On peut ainsi retenir le résultat remarquable suivant :

Soient α et β les solutions complexes de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$.
Alors on a : $ax^2 + bx + c = a(x-\beta)(x-\alpha)$.

Exemple : déterminer l'ensemble des solutions complexes des équations $(E) : -2x^2 - 4x - 3 = 0$.

On a $\Delta = (-4)^2 - 4 \times (-2) \times (-3) = 16 - 24 = -8 < 0$.
L'équation ne possède donc aucune solution réelle et possède en revanche deux solutions complexes :
Avec : $\delta = i\sqrt{8} = 2i\sqrt{2}$, on obtient :
$S = \left\{\frac{-(-4)-\delta}{2\times(-2)} ; \frac{-(-4)+\delta}{2\times(-2)}\right\} = \left\{\frac{4-\delta}{-4} ; \frac{4+\delta}{-4}\right\} = \left\{\frac{2-i\sqrt{2}}{-2} ; \frac{2+i\sqrt{2}}{-2}\right\} = \left\{-1 + \frac{\sqrt{2}}{2}i ; -1 - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right\}$

4.2. Solutions complexes des équations du second degré à coefficients complexes

Attention ! La résolution d'équations du second degré complexes à coefficients complexes est hors programme de terminale. Elle est présentée ici à titre informelle.

On appelle équation du second degré complexe à coefficients complexes une équation de la forme :
(E) : $ax^2 + bx + c = 0$ avec $a, b, c, \in \mathbb{C}$.
N.B. : on notera bien qu'ici, même les coefficients a, b et c peuvent être des nombres complexes.

La résolution de telles équations est tout à fait similaire à celles présentées en 4.1. Toute la difficulté de la résolution réside dans le fait qu'il faille trouver la valeur (complexe) du discriminant réduit. En effet, comme $a, b, c, \in \mathbb{C}$, on a $\Delta = b^2 - 4ac \in \mathbb{C}$. Le discriminant n'est plus forcément un nombre réel !

Il s'agit donc de trouver $\delta \in \mathbb{C}$ tel que $\delta^2 = \Delta$. Si Δ est un nombre réel, on peut résoudre l'équation en suivant la méthode expliquée en 4.1.

Exemple : résolvons l'équation $(E) : 3x^2 + 2x - \frac{\sqrt{3}}{3}i = 0$.

Le discriminant vaut : $\Delta = 2^2 - 4 \times 3 \times \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}i\right) = 4 + 4\sqrt{3}i$.
On cherche alors à calculer le discriminant réduit $\delta \in \mathbb{C}$ tel que $\delta^2 = 4 + 4\sqrt{3}$.
On peut écrire $\Delta = 4 + 4\sqrt{3}i = 8\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 8e^{i\frac{\pi}{3}} = \left(8e^{i\frac{\pi}{6}}\right)^2$.
Dès lors $\delta = 8e^{i\frac{\pi}{6}} = 8\left(cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + isin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right) = 8\frac{\sqrt{3}}{2} + 8i\frac{1}{2} = 4\sqrt{3} + 4i$.
L'ensemble des solutions est : $S = \left\{\frac{-2+4\sqrt{3}+4i}{2\times3} ; \frac{-2-4\sqrt{3}-4i}{2\times3}\right\} = \left\{\frac{-1+2\sqrt{3}+2i}{3} ; \frac{-1-2\sqrt{3}-2i}{3}\right\}$.

Cas général : résolvons l'équation $(E) : x^2 + \left(\sqrt{2}i - 1\right)x - \sqrt{2}i = 0$.

Le discriminant vaut $\Delta = \left(\sqrt{2}i - 1\right)^2 - 4 \times 1 \times \left(-\sqrt{2}i\right) = -2 - 2\sqrt{2}i + 1 + 4\sqrt{2}i = -1 + 2\sqrt{2}i$.
On cherche $\delta \in \mathbb{C}$ tel que $\delta^2 = -1 + 2\sqrt{2}i$.
On note δ sous forme algébrique, alors : $\delta = m + in$ avec $m, n \in \mathbb{C}$.
Alors : $\delta^2 = (m + in)^2 = m^2 + 2mni - n^2 = (m^2 - n^2) + (2mn)i$.

Par identification, il vient que :

$\delta^2 = -1 + 2\sqrt{2}i \Leftrightarrow (m^2 - n^2) + (2mn)i = -1 + 2\sqrt{2}i \Leftrightarrow m^2 - n^2 = -1\ et\ 2mn = 2\sqrt{2}$

$\Leftrightarrow m^2 - n^2 = -1\ et\ n = \frac{2\sqrt{2}}{2m} = \frac{\sqrt{2}}{m} \Leftrightarrow m^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{m}\right)^2 = -1\ et\ n = \frac{\sqrt{2}}{m} \Leftrightarrow m^2 - \frac{2}{m^2} + 1 = 0\ et\ n = \frac{\sqrt{2}}{m}$

$\Leftrightarrow \frac{m^4+m^2-2}{m^2} = 0\ et\ n = \frac{\sqrt{2}}{m} \Leftrightarrow m^4 + m^2 - 2 = 0\ et\ n = \frac{\sqrt{2}}{m}$

N.B. : rappelons qu'un quotient est nul si et seulement si son numérateur est nul.

En posant $M = m^2$, l'équation $m^4 + m^2 - 2 = 0$ se réécrit : $M^2 + M - 2 = 0$, équation du second degré réelle que nous savons fort bien résoudre.
Son discriminant vaut $1^2 - 4 \times 1 \times (-2) = 1 + 8 = 9$.
Les solutions de cette équation sont finalement $M = \frac{-1-\sqrt{9}}{2} = -2$ et $M = \frac{-1+\sqrt{9}}{2} = 1$.
On a donc $M^2 + M - 2 = (M+2)(M-1)$ ou encore $m^4 + m^2 - 2 = (m^2+2)(m^2-1)$.

Comme m est réel, $m^2 + 2$ ne peut être égal à 0. On a donc :

$\delta^2 = -1 + 2\sqrt{2}i \Leftrightarrow m^2 - 1 = 0\ et\ n = \frac{\sqrt{2}}{m} \Leftrightarrow m = 1\ et\ n = \sqrt{2}\ ou\ m = -1\ et\ n = -\sqrt{2}$.

On a donc : $\delta = 1 + \sqrt{2}i\ ou\ \delta = -1 - \sqrt{2}i$.

On choisit arbitrairement que $\delta = 1 + \sqrt{2}i$ (cela ne change rien au résultat final). Les solutions de l'équation $x^2 + (\sqrt{2}i - 1)x - \sqrt{2}i = 0$ sont finalement :

$$x = \frac{-(\sqrt{2}i-1)-(1+\sqrt{2}i)}{2\times1} = \frac{-\sqrt{2}i+1-1-\sqrt{2}i}{2} = -\sqrt{2}i \text{ et } x = \frac{-(\sqrt{2}i-1)+(1+\sqrt{2}i)}{2\times1} = \frac{-\sqrt{2}i+1+1+\sqrt{2}i}{2} = 1$$

5. Nombres complexes et géométrie

5.1. Plan complexe

Nous avons déjà bien utilisé l'interprétation géométrique des nombres complexes. Toutefois, il convient de formaliser cette notion :

On appelle plan complexe le plan orthonormé $(O\,;\vec{u},\vec{v})$ dans lequel on représente tout nombre complexe $z \in \mathbb{C}$, $z = x + iy$, par un point M de coordonnées $(x; y)$. Les nombres z est qualifié d'affixe du point M.
N.B. : la partie réelle est donc représentée sur l'axe des abscisses et la partie imaginaire sur l'axe des ordonnées.

5.2. Symétries, rotations et translations

Nous avons déjà prouvé les propriétés suivantes quoique nous les avions énoncées de manière peu géométrique. En voici une formulation plus géométrique :

Soit A un point d'affixe $z = x + iy$ et A' sont symétrique par rapport à l'axe des abscisses. Alors l'affixe de A' est $\bar{z} = x - iy$.

Soit A un point d'affixe $z = x + iy$ et A' sont symétrique par rapport à l'axe des ordonnées. Alors l'affixe de A' est $z' = -x + iy$.

Soit A un point d'affixe $z = x + iy$ et A' sont symétrique par rapport à l'origine du plan complexe. Alors l'affixe de A' est $-z = -x - iy$.

Quant aux rotations par rapport à l'origine :

Soit A un point d'affixe z et A' le point obtenu en faisant subir au point A une rotation de θ radians par rapport à l'origine du plan complexe. Alors l'affixe de A' est $z' = ze^{i\theta}$.

Preuve : soit $z \in \mathbb{C}$, z peut s'écrire sous la forme $z = \alpha e^{i\beta}$ avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Soit $\theta \in \mathbb{R}$.
Alors : $ze^{i\theta} = \alpha e^{i\beta} e^{i\theta} = \alpha e^{i(\beta+\theta)}$. On a bien $arg(ze^{i\theta}) = arg(z) + \theta$ ce qui correspond à une rotation de θ radians par rapport à l'origine.

Soit A un point d'affixe z et A' le point obtenu en faisant subir au point A une translation $\vec{t}(x; y)$. Alors l'affixe de A' est $z' = z + x + iy$.

Preuve : on note $A(\alpha; \beta)$ avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
On a $z = \alpha + i\beta$. Si on translate A de $\vec{t}(x; y)$, on obtient le point $A'(\alpha + x; \beta + y)$.
On constate que : $z + x + iy = \alpha + i\beta + x + iy = (\alpha + x) + i(\beta + y)$, ce qui est effectivement l'affixe de A'.

5.3. Problèmes de géométrie

Nous faisons ici remarquer quelques propriétés intéressantes pour la résolution d'exercices de géométrie faisant ou pouvant faire intervenir les nombres complexes. Ces propriétés ne sont pas spécialement à retenir. Il convient surtout de bien les comprendre, elles et leur démonstration, afin que vous puissiez prouver vous-même des propriétés similaires.

Soit le plan $(O ; \vec{u}, \vec{v})$ et soient A et B deux points d'affixes respectives z_a et z_b.
Alors : $\|\overrightarrow{AB}\| = |z_b - z_a|$ et $(\vec{u}; \overrightarrow{AB}) = arg(z_b - z_a)$.

Preuve : on note $A(x_a; y_a)$ et $B(x_b; y_b)$.
On a alors $z_a = x_a + iy_a$ et $z_b = x_b + iy_b$ et donc $z_b - z_a = (x_b - x_a) + i(y_b - y_a)$. Or $x_b - x_a$ et $y_b - y_a$ sont les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$.

Soit le plan $(O ; \vec{u}, \vec{v})$ et soient A, B et M trois points d'affixes respectives z_a, z_b et z_m.
Alors : $(\overrightarrow{MA}; \overrightarrow{MB}) = arg\left(\frac{z_b - z_m}{z_a - z_m}\right)$.

Preuve : on note $A(x_a; y_a)$, $B(x_b; y_b)$ et $M(x_m; y_m)$. On note $(\vec{u}; \overrightarrow{MA}) = \theta_a$ et $(\vec{u}; \overrightarrow{MB}) = \theta_b$.
On a: $(\overrightarrow{MA}; \overrightarrow{MB}) = (\vec{u}; \overrightarrow{MB}) - (\vec{u}; \overrightarrow{MA}) = \theta_b - \theta_a$.
Or, d'après la propriété précédente : $(\vec{u}; \overrightarrow{MB}) = arg(z_b - z_m)$ et $(\vec{u}; \overrightarrow{MA}) = arg(z_a - z_m)$.
De plus, on sait que $\forall z, z' \in \mathbb{C}, arg\left(\frac{z}{z'}\right) = arg(z) - arg(z')$.
D'où : $(\overrightarrow{MA}; \overrightarrow{MB}) = (\vec{u}; \overrightarrow{MB}) - (\vec{u}; \overrightarrow{MA}) = arg(z_b - z_m) - arg(z_a - z_m) = \frac{arg(z_b - z_m)}{arg(z_a - z_m)}$.

Soit le plan $(O\,;\vec{u},\vec{v})$ et soient A, B et M trois points d'affixes respectives z_a, z_b et z_m.
ABM est isocèle en M si et seulement si $\frac{z_b-z_m}{z_a-z_m}=1$.

Preuve :

D'après les propriétés précédentes, on a $\frac{|z_b-z_m|}{|z_a-z_m|}=\frac{\|\overrightarrow{MB}\|}{\|\overrightarrow{MA}\|}$. Donc, $\frac{|z_b-z_m|}{|z_a-z_m|}=1$ équivaut à $\|\overrightarrow{MB}\|=\|\overrightarrow{MA}\|$ ce qui équivaut à dire que le triangle ABM est isocèle en M.

Soit le plan $(O\,;\vec{u},\vec{v})$ et soient A, B et M trois points d'affixes respectives z_a, z_b et z_m.
Si B est le point obtenu en faisant subir à A une rotation de θ par rapport à M, alors l'affixe z_b de B vaut : $z_b=(z_a-z_m)e^{i\theta}+z_m$.

Preuve : on note $A(x_a;y_a)$, $B(x_b;y_b)$ et $M(x_m;y_m)$.

Par hypothèse, on a $\left(\overrightarrow{MA};\overrightarrow{MB}\right)=\theta$ et $\|\overrightarrow{MA}\|=\|\overrightarrow{MB}\|$ puisque la rotation préserve les longueurs.

D'après les propriétés précédentes, il vient que :

$\left(\overrightarrow{MA};\overrightarrow{MB}\right)=\theta \Leftrightarrow arg\left(\frac{z_b-z_m}{z_a-z_m}\right)=\theta$

$\|\overrightarrow{MA}\|=\|\overrightarrow{MB}\| \Leftrightarrow |z_a-z_m|=|z_b-z_m| \Leftrightarrow \frac{|z_b-z_m|}{|z_a-z_m|}=\left|\frac{z_b-z_m}{z_a-z_m}\right|=1.$

Ce qui est équivalent à :

$$\frac{z_b-z_m}{z_a-z_m}=1\times e^{i\theta}=e^{i\theta} \Leftrightarrow z_b-z_m=(z_a-z_m)e^{i\theta} \Leftrightarrow z_b=(z_a-z_m)e^{i\theta}+z_m$$