Cours : fiche n°2 - Suites et convergences

Thème : suites et variations, limite et convergence, suites arithmétiques, géométriques, arithmético-géométriques, quelques théorèmes, etc.

1. Suites et variations

1.1. Qu'est-ce qu'une suite ?

En première approche, nous dirons qu'une suite n'est rien d'autre qu'une succession de nombres, typiquement une suite de nombres qui évoluent en suivant une certaine logique. On dispose d'un ou plusieurs nombres initiaux. Le nombre suivant va dépendre du ou des termes précédents, celui encore après va dépendre de son prédécesseur ou de quelques-uns d'entre eux, et ainsi de suite.

Exemple : La succession de nombres : 0, 2, 4, 6, 8, etc. est une suite. Son terme initial est 0. Et la suite évolue de 2 en 2.

Plus formellement, on écrira : soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} = u_n + 2$.

Les éléments d'une suite, des nombres typiquement, sont appelés des termes. On parle donc de 1er, 2ème, …, n-ième terme de la suite. Le premier terme d'une suite, à savoir celui dont dépendent les suivants, est qualifié de terme initial. Si les termes suivants dépendent de plusieurs termes précédents, on aura plusieurs termes initiaux.

Dans l'exemple précédent, u_0 est le terme initial de la suite. Les termes suivants sont successivement u_1, u_2, u_3 et ainsi de suite. On dit que la suite est indexée sur l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels car les coefficients (indexes) sont les entiers naturels, i.e. : 0, 1, 2, 3, etc.

Dans l'exemple précédent encore, on remarquera qu'il est possible de calculer n'importe quel u_n directement, juste en fonction du terme initial u_0, c'est-à-dire sans avoir besoin de calculer u_{n-1}, u_{n-2}, …, u_1, u_0. En effet, on a : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = u_0 + 2n$. On dit qu'on a trouvé l'expression du terme général de la suite !

On qualifie d'expression du terme général d'une suite l'expression qui permet d'établir la valeur du terme quelconque u_n (hors termes initiaux) en fonction du ou des termes initiaux de la suite.

1.2. Variations d'une suite

Très logiquement, une suite est croissante si, de « terme en terme », elle augmente (ou au minimum reste constante). Inversement, elle est dite décroissante si, de « terme en terme », elle diminue (du moins si elle reste constante). La suite est finalement constante si, de « terme en terme », elle ne varie pas. Dans la même veine, on parle de suite strictement croissante (resp. décroissante) si la suite est croissante (resp. décroissante) et n'est pas constante. S

Ces concepts peuvent être formulés plus mathématiquement de la manière suivante. Soit $(u_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels :

La suite $(u_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est croissante à partir du rang j si et seulement si $\forall n \in \mathbb{N}, n > j, u_{n+1} \geq u_n$. Elle est donc croissante si et seulement si $\forall n \in \mathbb{N}, n > j, u_{n+1} - u_n \geq 0$.

La suite $(u_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est décroissante à partir du rang j si et seulement si $\forall n \in \mathbb{N}, n > j, u_{n+1} \leq u_n$. Elle est donc décroissante si et seulement si $\forall n \in \mathbb{N}, n > j, u_{n+1} - u_n \leq 0$.

La suite $(u_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est constante à partir du rang j si et seulement si $\forall n \in \mathbb{N}, n > j, u_{n+1} = u_n$. Elle est donc constante si et seulement si $\forall n \in \mathbb{N}, n > j, u_{n+1} - u_n = 0$.

On ajoutera également que :

Si suite $(u_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est croissante ou décroissante est dite monotone.

Si suite $(u_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante ou strictement décroissante est dite strictement monotone.

Exemple : soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les suites définies par :
- $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} = u_n + 2$
- $v_0 = 5$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*, v_{n+1} = v_n - 5$.

On constate que :
- $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} - u_n = u_n + 2 - u_n = 2 > 0$. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc croissante. Elle est même strictement croissante.
- $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $v_{n+1} - v_n = v_n - 5 - v_n = -5 < 0$. La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc décroissante. Elle est même strictement décroissante.

Les lignes ci-dessus, quoique le cas soit simple à traiter, donnent une méthode afin de répondre à la question « la suite est-elle croissante ? ». Si on avait posé la question « la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle décroissante ? », n'oubliez pas qu'une proposition est fausse si elle admet un contre-exemple. Il suffit donc de remarquer par exemple que $u_2 - u_1 = 4 - 2 = 2 \nleq 0$, ce qui suffit à affirmer que la suite n'est pas décroissante. Attention ! Un exemple ne suffit pas à affirmer une proposition, ce n'est qu'un exemple ! C'est là toute la différence entre une condition nécessaire et une condition suffisante.

Attention ! Une suite peut n'être ni croissante, ni décroissante, ni constante.
Exemple : soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_n = (-1)^n$. On a $u_0 = -1$, $u_1 = 1$, $u_2 = -1$ et ainsi de suite.

Par ailleurs, si tous les termes de la suite sont strictement positifs, un autre critère nous permet de déterminer si la suite est croissante, décroissante ou constante. Soit $(u_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une suite de réels positifs :

Une suite $(u_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de réels positifs est croissante à partir du rang j ssi $\forall n \in \mathbb{N}, n > j, \frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$.
Une suite $(u_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de réels positifs est décroissante à partir du rang j ssi $\forall n \in \mathbb{N}, n > j, \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq 1$.
Une suite $(u_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de réels positifs est constante à partir du rang j ssi $\forall n \in \mathbb{N}, n > j, \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$.

1.3. Somme des termes d'une suite

Soit une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

On qualifie de somme des n premiers termes d'une suite la somme suivante :	$S = u_0 + u_1 + \cdots + u_{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} u_k$
On peut également calculer la somme des termes du i-ième au j-ième terme :	$S = u_i + u_{i+1} + \cdots + u_{j-1} + u_j = \sum_{k=i}^{j} u_k$

Exemple : soit encore la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} = u_n + 2$.

La somme des 5 premiers termes est égales à :

$$\sum_{k=0}^{4} u_k = u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + u_4 = 2 + 4 + 6 + 8 + 10 = 30$$

2. Suites arithmétiques, géométriques et arithmético-géométriques

Nous allons à présent étudier quelques suites des plus communes.

2.1. Suites arithmétiques

On appelle suite arithmétique de raison r une suite $(u_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de réels la forme $u_{n+1} = u_n + r$, avec r et u_0 deux réels fixés.

On a les propriétés suivantes, que nous allons tâcher de démontrer.

Le terme général d'une suite arithmétique $(u_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est :	$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = u_0 + nr$.

Soit r la raison d'une suite arithmétique $(u_i)_{i\in\mathbb{N}}$:	Si $r > 0$, la suite est strictement croissante. Si $r = 0$, la suite est constante. Si $r < 0$, la suite est strictement décroissante.	
La somme des $n+1$ premier termes d'une suite arithmétique $(u_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est :	$$\sum_{k=0}^{n} u_k = (n+1)\frac{u_0+u_n}{2}$$	Remarques : • $(n+1)$ est le nombre de termes. • $(u_0+u_n)/2$ est la moyenne du 1er et du dernier terme.

Afin de démontrer, les propriétés qui précédent, nous allons introduire la notion de raisonnement par récurrence. On parle encore de preuve ou démonstration par récurrence. Principe :

Etape	Description
1	On montre que la proposition P_n est initialement vraie, typiquement qu'elle est vraie pour $n = 0$. On dira que la propriété est vraie au rang 0 ou encore que P_0 est vraie.
2	On suppose la proposition P_n est vraie pour un certain n entier. On dira qu'on suppose que la propriété P_n est vraie au rang $n \in \mathbb{N}$.
3	On montre que, si la proposition P_n est vraie au rang $n \in \mathbb{N}$, elle est encore vraie au rang $n + 1$, c'est-à-dire que P_{n+1} est encore vraie. A cette étape, on essaie de servir utilement de l'hypothèse, c'est-à-dire du fait que P_n est supposée vraie. Également, il n'est pas inutile d'écrire la signification de P_{n+1} (c'est le résultat qu'on cherche à atteindre, à prouver !).
4	On conclut que la propriété P_n est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Démonstrations : tâchons de démontrer les propriétés précédentes sur les suites arithmétiques. Soit $u_0, r \in \mathbb{R}$ et soit $(u_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une suite arithmétique s'écrivant $u_{n+1} = u_n + r$.

- Soit la proposition P_n : "$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = u_0 + nr$" :

On a bien $u_0 = u_0 + 0 \times r$, d'où P_0 vraie.
Supposons P_n vraie au rang $n \in \mathbb{N}$. Par hypothèse (en orange), on a: $u_{n+1} = u_n + r = u_0 + nr + r$.
Comme convenu, $u_{n+1} = u_0 + nr + r = u_0 + (n+1)r$. La proposition P_{n+1} est donc vraie.
Conclusion : P_n vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

- Pour démontrer la relation entre les variations de la suite arithmétique et le signe de sa raison, nous nous contenterons d'une démonstration directe.

Par définition, nous savons que $u_{n+1} = u_n + r$. Il vient que $u_{n+1} - u_n = u_n + r - u_n = r$.
Par définition de la croissance, décroissance et constance d'une suite, on en déduit que : si $r > 0$, la suite est strictement croissante, si $r < 0$, elle est strictement décroissante et si $r = 0$, elle est constante.

- Soit la proposition P_n : "$\sum_{k=0}^{n} u_k = (n+1)\frac{u_0+u_n}{2}$" :

On a bien $\sum_{k=0}^{0} u_0 = (0+1)\frac{u_0+u_0}{2} = u_0$. La proposition P_n est donc vraie au rang 0.
Supposons P_n vraie au rang $n \in \mathbb{N}$. On a donc par hypothèse (hypothèse en orange) :

$$\sum_{k=0}^{n+1} u_k = u_{n+1} + \sum_{k=0}^{n} u_k = u_{n+1} + (n+1)\frac{u_0 + u_n}{2} = \frac{2u_{n+1}}{2} + (n+1)\frac{u_0}{2} + (n+1)\frac{u_n}{2}$$

On remplace u_{n+1} par $u_{n+1} = u_n + r$, on bidouille, puis on factorise :

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{n+1} u_k = \frac{2u_n + 2r + nu_0 + u_0 + nu_n + u_n}{2} = \frac{2u_n + 2r + nu_0 + u_0 + nu_n + u_0 + nr}{2}$$

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{n+1} u_k = \frac{(n+2)u_n + (n+2)r + (n+2)u_0}{2} = (n+2)\frac{u_n + r + u_0}{2} = (n+2)\frac{u_{n+1} + u_0}{2}$$

La proposition P_{n+1} est donc vraie.

Par conséquent, la propriété P_n est vraie pour tout entier naturel n.

<u>Exemple</u> : donner le terme général de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 4$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} = u_n + 3$. Calcule les termes u_6 et u_{12}. Calculer la somme des 13 premiers termes. Calculer la somme des termes 6 à 12.

- Le terme général de la suite est : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 4 + 3n$.
- On en déduit que : $u_6 = 4 + 3 \times 6 = 22$, $u_{12} = 4 + 3 \times 12 = 40$.
- Somme des 13 premiers termes : $\sum_{i=0}^{12} u_i = (12+1)\frac{4+40}{2} = 13 \times 22 = 286$.
- Somme des termes 6 à 12 :

Il y a $12 - 6 + 1 = 7$ termes à sommer. Le premier terme est u_6 et le dernier terme u_{12}.

On a donc : $\sum_{i=6}^{12} u_i = (12 - 6 + 1)\frac{22+40}{2} = 7 \times 31 = 217$.

2.2. <u>Suites géométriques</u>

On appelle suite géométrique de raison q une suite $(u_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de réels la forme $u_{n+1} = qu_n$ avec q et u_0 deux réels fixés.

On a les propriétés suivantes, que nous allons tâcher de démontrer.

Le terme général d'une suite géométrique $(u_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est :	$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = u_0 q^n$.
Soit q la raison d'une suite géométrique $(u_i)_{i\in\mathbb{N}}$:	• Si $q > 1$: Si $u_0 \geq 0$, la suite est croissante et positive. Si $u_0 \leq 0$, la suite est décroissante et négative. • Si $q = 1$, la suite est constante. • Si $0 < q < 1$: Si $u_0 \geq 0$, la suite est décroissante et positive. Si $u_0 \leq 0$, la suite est décroissante et négative. • Si $q < 0$, la suite n'est pas monotone (ni croissante, ni décroissante). Elle est successivement positive puis négative. On parle de suite alternée.

La somme des $n+1$ premier termes d'une suite géométrique $(u_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est :	$\sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$	Remarques : • u_0 est le premier terme. • $n+1$ est le nombre de termes.

Justifications : soit $u_0, q \in \mathbb{R}$ et soit $(u_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique s'écrivant $u_{n+1} = qu_n$.

- Soit la proposition P_n : "$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = u_0 q^n$" :

Sans prouver formellement cette proposition par récurrence, on peut constater que :
- Par définition, on a : $u_1 = qu_0$, $u_2 = qu_1 = q(qu_0) = q^2u_0$, $u_3 = qu_2 = q \times q^2u_0 = q^3u_0$, etc.
- Finalement, il vient que : $u_n = u_0q^n$ pour tout entier n.

- Sens de variation de u_n :

Une fois encore, sans apporter une preuve par récurrence, constatons que :
- Si $q = 1$, on constate que : $u_1 = 1 \times u_0 = u_0$, $u_2 = 1 \times u_1 = u_1 = u_0$ et ainsi de suite. La suite est donc bien constante.
- Si $q > 1$, on a $q < q^2 < q^3 < \cdots < q^n$. Dès lors, si $u_0 \geq 0$, on a $qu_0 \leq q^2u_0 \leq q^3u_0 \leq \cdots \leq q^nu_0$. Autrement dit, les termes de la suite sont bien « rangés par ordre croissant ». La suite est bien croissante. Au contraire, le fait que $u_0 \leq 0$ change le sens des inéquations et les termes sont « rangés par ordre décroissant » : $qu_0 \geq q^2u_0 \geq q^3u_0 \geq \cdots \geq q^nu_0$. La suite est donc décroissante.
- Si $0 < q < 1$, de terme en terme, on va toujours plus se rapprocher de 0. On a $q > q^2 > \cdots > q^n > 0$. Dès lors, si $u_0 \geq 0$, on a $qu_0 \geq q^2u_0 \geq q^3u_0 \geq \cdots \geq q^nu_0 \geq 0$. La suite est décroissante et tend vers 0 quand n tend vers l'infini. On dit qu'elle converge vers 0. Au contraire, si $u_0 \leq 0$, on va se rapprocher de 0 « par le bas » et on a : $qu_0 \leq q^2u_0 \leq q^3u_0 \leq \cdots \leq q^nu_0 \leq 0$. La suite est croissante et tend vers 0 quand n tend vers l'infini.

- Soit la proposition P_n : "$\sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$" :

On peut prouver cette proposition par récurrence :

$$u_0 \frac{1-q^{0+1}}{1-q} = u_0 \frac{1-q}{1-q} = u_0 = \sum_{k=0}^{0} u_k \Rightarrow P_0 \; vraie$$

Supposons P_n au rang $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=0}^{n+1} u_k = u_{n+1} + \sum_{k=0}^{n} u_k = u_0q^{n+1} + u_0 \frac{1-q^{n+1}}{1-q} = \frac{u_0q^{n+1} - q^{n+2}u_0 + u_0 - u_0q^{n+1}}{1-q} = \frac{u_0(1+q^{n+2})}{1-q}$$

D'où P_{n+1} vraie si P_n vraie.
Conclusion : P_n vraie pour tout entier n.

Exemple : donner le terme général de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 3$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} = 2u_n$. Calcule les termes u_5 et u_{10}. Calculer la somme des 10 premiers termes. Calculer la somme des termes 5 à 10.

- Le terme général de la suite est : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 3 \times 2^n$.
- On en déduit que : $u_5 = 3 \times 2^5 = 96$, $u_{12} = 3 \times 2^{10} = 3072$.
- Somme des 10 premiers termes : $\sum_{i=0}^{10} u_i = 3\frac{1-2^{10+1}}{1-2} = 3\frac{1-2^{11}}{-1} = 3\frac{-2047}{-1} = 6141$.
- Somme des termes 5 à 10 : il y a $10 - 5 + 1 = 6$ termes à sommer. Le premier terme est u_5.

On a donc : $\sum_{i=5}^{10} u_i = 96\frac{1-2^{10-5+1}}{1-2} = 96\frac{1-2^6}{-1} = 96\frac{-63}{-1} = 6048$.

2.3. <u>Suites arithmético-géométriques</u>

La notion de suite arithmético-géométrique vient généraliser les notions de suites arithmétiques et géométriques. Nous les étudions ici à titre informel.

On appelle suite arithmético-géométrique une suite $(u_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de réels la forme $u_{n+1} = au_n + b$ avec u_0, a et b trois réels fixés.

On a les propriétés suivantes :

Le terme général d'une suite arithmético-géométrique $(u_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est :	$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = a^n\left(u_0 - \frac{b}{1-a}\right) + \frac{b}{1-a}$.
Soit q la raison d'une suite géométrique $(u_i)_{i\in\mathbb{N}}$:	• Si $a = 0$, la suite est constante ou constante à partir du range $n = 1$. • Si $a = 1$, la suite est arithmétique. • Si $b = 0$, la suite est géométrique. • Si $a > 1$ et $u_0 - \frac{b}{1-a} \geq 0$ alors la suite est croissante. • Si $a > 1$ et $u_0 - \frac{b}{1-a} \leq 0$ alors la suite est décroissante. • Si $0 < a < 1$ et $u_0 - \frac{b}{1-a} \geq 0$ alors la suite est décroissante et tend vers $\frac{b}{1-a}$ quand n tend vers $+\infty$. • Si $0 < a < 1$ et $u_0 - \frac{b}{1-a} \leq 0$ alors la suite est croissante et tend vers $\frac{b}{1-a}$ quand n tend vers $+\infty$.
La somme des $n + 1$ premier termes d'une suite arithmético-géométrique $(u_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est :	$\sum_{k=0}^{n} u_k = (u_0 - \frac{b}{1-a})\frac{1-a^n}{1-a} + n\frac{b}{1-a}$

Important ! En terminale, il ne vous est clairement pas imposé de connaître ce type de suites, encore moins d'en connaître les propriétés. Néanmoins, à titre d'exercice, vous pouvez être amenés à en étudier, bien guidés, sans que le terme « arithmético-géométrique » ne soit mentionné. Aussi, cette section est rédigée à titre d'information.

<u>Justifications</u> : soit $u_0, a, b \in \mathbb{R}$ et soit $(u_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une suite arithmético-géométrique pouvant s'écrivant sous la forme $u_{n+1} = au_n + b$.

- Justification du terme général de la suite. On obtient récursivement :

$$u_n = au_{n-1} + b = a(au_{n-2} + b) + b = a^2u_{n-2} + a^1b + a^0b = a^2(au_{n-3} + b) + a^1b + a^0b$$
$$u_n = a^3u_{n-3} + a^2b + a^1b + a^0b = \cdots = a^nu_0 + a^{n-1}b + a^{n-2}b + \cdots a^1b + a^0b$$
$$u_n = a^nu_0 + b\sum_{k=0}^{n-1} a^k = a^nu_0 + b\left(\frac{1-a^n}{1-a}\right) = a^nu_0 + \frac{b}{1-a} - \frac{ba^n}{1-a} = a^n\left(u_0 - \frac{b}{1-a}\right) + \frac{b}{1-a}$$

- Justification des variations de la suite : en étudiant sereinement le signe de chacun des termes et facteurs du terme général de la suite arithmético-géométrique, on obtient effectivement les propriétés ci-avant présentées.

- Justification de la somme des termes d'une suite arithmético-géométrique. En notant $r = \frac{b}{1-a}$, on a :

$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = a^n(u_0 - r) + r$, d'où :

$$\sum_{k=0}^{n-1} u_k = \sum_{k=0}^{n-1}\left(a^k(u_0 - r) + r\right) = (u_0 - r)\sum_{k=0}^{n-1} a^n + \sum_{k=0}^{n-1} r = (u_0 - r)\frac{1-a^n}{1-a} + nr$$

3. Suites récursives, convergence et divergence

3.1. Formellement, qu'est-ce qu'une suite ?

Jusqu'à maintenant, nous n'avons pas réellement donné la définition d'une suite. Par ailleurs, nous n'avons fait usage que de suites récursives. En fait, une suite, ce n'est ni plus ni moins qu'une sorte de « fonction », ou plus exactement une application qui associe un nombre à un index. Formellement :

Une suite est une application d'un ensemble $I \subseteq \mathbb{N}$ dans un ensemble $\mathbb{K}$ quelconque.
Le plus souvent $I = \mathbb{N}$ et $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. En effet, I peut être en fait un ensemble discret autre que l'ensemble des entiers naturels. Cependant, on se cantonnera au cas où $I \subseteq \mathbb{N}$ et $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.
Si u est une suite, on la note $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sauf à ce qu'on ait $I \neq \mathbb{N}$.

3.2. Qu'est-ce qu'une suite récursive ?

Une suite est dite récursive dès lors que chacun des termes dépend d'un ou plusieurs prédécesseurs. C'est pourquoi on est obligé de définir le ou les termes initiaux. En effet, il faut un début et il faut encore que ce début ne dépende pas des prédécesseurs. Si les termes dépendent uniquement du précédent, on parle de suite récursive d'ordre 1 (ou du 1er ordre). Si les termes dépendent des deux précédents, on parle de suite récursive d'ordre 2 (ou du 2nd ordre). Et ainsi de suite... Plus généralement, on parle de récurrence simple (1er ordre) et de récurrence multiple (2nd ordre, …, Nème ordre).

Une suite réelle récursive d'ordre 1 est une application d'un ensemble $I \subseteq \mathbb{N}$ dans $J \subseteq \mathbb{R}$ est une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 \in J \text{ réel fixé} \\ f : I \to J \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

Cette définition s'étend bien entendu aux récurrences multiples. On a alors :

$$\begin{cases} u_0, \dots, u_k \in J \text{ réels fixés (avec } k \text{ entier)} \\ f : J \to J \\ \forall n \in \mathbb{N}\ n > k, \qquad u_{n+k+1} = f(u_n, u_{n+1}, \dots, u_{n+k}) \end{cases}$$

Exemple : soit une suite arithmético-géormatique $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par v_0 réel fixé, $a, b \in \mathbb{R}$ $v_{n+1} = av_n + b$. Alors la fonction f évoquée dans la précédente définition n'est rien d'autre qu'une fonction affine, et plus exactement : $f :\ \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad x \mapsto ax + b$.

Rien ne nous empêche désormais de définir des suites récursives quelconques.

Autre exemple : soit une suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par v_0 réel fixé, $a, b \in [1; +\infty[$ $v_{n+1} = ae^{bv_n}$. Cette fois-ci, on a $v_{n+1} = f(v_n)$ avec f la fonction définie par $f :\ \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad x \mapsto ae^{bx}$.

A présent, on peut se demander si la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, décroissante ou constante et surtout pour quelles valeurs de a et b elle l'est ? Pour ce faire, on va utiliser un procédé classique.

On souhaite donc connaître le signe de $v_{n+1} - v_n = ae^{bv_n} - v_n$ selon les valeurs $a, b \in [1; +\infty[$ choisie.
On pose alors la fonction $g :\ \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad x \mapsto ae^{bx} - x$ et on étudie ses variations.
On a : $\forall x \in \mathbb{R},\ \ g'(x) = abe^{bx} - 1$.
Or $g'(x) = abe^{bx} - 1 \geq 0 \ \Rightarrow abe^{bx} \geq 1$
$\Rightarrow ln\left(abe^{bx}\right) = ln(ab) + ln\left(e^{bx}\right) = ln(ab) + bx \geq ln(1) = 0$ (par stricte croissance de ln)

$$\Rightarrow x \geq -\frac{ln(ab)}{b}$$

Il vient que g est décroissante puis croissante et surtout atteint un minimum global en $-\frac{ln(ab)}{b}$ dont l'image est :

$$g\left(-\frac{ln(ab)}{b}\right) = ae^{-b\frac{ln(ab)}{b}} + \frac{ln(ab)}{b} = ae^{-ln(ab)} + \frac{ln(ab)}{b} = ae^{ln\left((ab)^{-1}\right)} + \frac{ln(ab)}{b} = \frac{a}{ab} + \frac{ln(ab)}{b}$$

Soit finalement : $g\left(-\frac{ln(ab)}{b}\right) = \frac{1+ln(a)+ln(b)}{b}$.
Or, la fonction ln est strictement croissante et on a :
$\forall\ a, b \in [1\ ; +\infty[, a \leq b \Rightarrow 0 \leq ln(a) \leq ln(b) \Rightarrow 1 + ln(a) + ln(b) > 0$

$$\Longrightarrow\ g\left(-\frac{ln(ab)}{b}\right) = \frac{1 + ln(a) + ln(b)}{b} > 0$$

Comme $-\frac{ln(ab)}{b}$ est un minimum global, $g(x) > 0$ pour tout x reel et quels que soient $a, b \in [1; +\infty[$.
Conclusion, $v_{n+1} - v_n$ est strictement positif quels que soient $a, b \in [1; +\infty[$. La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc strictement croissante pour tout $a, b \in [1; +\infty[$.

3.3. Convergence et divergence

Les notions de convergence et de divergence sont aux suites ce que les limites sont aux fonctions. Une suite est dite convergente lorsque ses termes se rapprochent irrémédiablement d'une certaine valeur. Une suite divergente est en revanche une suite dont les termes tendent vers l'infini et au-delà…

Formellement, soit une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ quelconque :

On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite réelle convergente ssi : $\exists l \in \mathbb{R} \,/\, \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$
On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite réelle divergente ssi : $\nexists l \in \mathbb{R} \,/\, \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$

Attention ! Une suite divergente ne tend pas forcément vers $\pm\infty$ pour n grand.
Exemple : la suite définie par $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = (-1)^n$ est divergente ! Elle oscille entre -1 et 1.

Malgré tout, nous n'avons pas défini la notion de limite. Aussi, donnons une définition plus rigoureuse des notions de convergence et de divergence. Les deux définitions suivantes définissent justement le terme de « limite ». Soit une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite réelle convergente ssi pour tout $\varepsilon > 0$ ($\varepsilon \in \mathbb{R}^+$), il existe un rang $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N} : n > N \Rightarrow \lvert u_n - l\rvert \leq \varepsilon$. On dit alors que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$. Plus succinctement : $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n > N \Rightarrow \lvert u_n - l\rvert \leq \varepsilon$.
$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite divergente ssi elle n'est pas convergente.
$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite divergent vers $+\infty$ ssi pour tout $\varepsilon > 0$ ($\varepsilon \in \mathbb{R}^+$), il existe un rang $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N} : n > N \Rightarrow u_n > \varepsilon$. On dit alors que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$. Plus succinctement : $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n > N \Rightarrow u_n > \varepsilon$.

Explication : cette formulation signifie que :

- Si l'on a une suite convergent vers une limite l, on trouvera toujours un u_N qui est proche de l à $\pm\,\varepsilon$ près, avec ε aussi petit que l'on veut. Même, cette définition dit qu'on peut trouver un tel u_N où tout les u_N suivants (i.e. u_{N+1}, u_{N+2}, …, u_∞) seront au moins aussi proche de l que lui. Autrement dit, on peut faire approcher u_n de l autant qu'on veut ;
- Si une suite diverge vers $+\infty$, on pourra toujours trouver un u_n et ses suivants aussi grands qu'on veut.

Important ! Nous avons donc une première façon de montrer qu'une suite converge ou diverge. En effet, dans le pire des cas, comme souvent, pour prouver quelque chose, on peut toujours repartir de la définition même.

3.4. Opération sur les limites

Dans cette partie, on liste les limites usuelles. Ce sont les formules pratiques pour calculer la limite d'une suite. Avant de mémoriser ses formules, il importe surtout de les comprendre ! Quoiqu'il en soit, on peut les prouver en repartant de la définition même de limite (fournie ci-dessus).

Par mesure de commodité, on note $\overline{\mathbb{R}}$ (prononcé « R barre ») l'ensemble $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$.
Soit $k, l \in \overline{\mathbb{R}}$ et soient deux suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que :
$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = k \ et \ \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = l$

k	l	$(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$	$\lim\limits_{n\to+\infty} w_n$
$+\infty$	$+\infty$	$u_n + v_n$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$u_n + v_n$	$-\infty$
$k \in \mathbb{R}$	$+\infty$	$u_n + v_n$	$+\infty$
$k \in \mathbb{R}$	$-\infty$	$u_n + v_n$	$-\infty$
$k \in \mathbb{R}$	$l \in \mathbb{R}$	$u_n + v_n$	$k + l$
$+\infty$	$-\infty$	$u_n + v_n$	Forme indéterminée
$k \in \mathbb{R}^*$	$+\infty$ (resp. $-\infty$)	$u_n v_n$	$+k\infty$ (resp. $-k\infty$)
0	$+\infty$ ou $-\infty$	$u_n v_n$	Forme indéterminée
$k \in \mathbb{R}$	$l \in \mathbb{R}$	$u_n v_n$	kl
$k \in \mathbb{R}$	0	$u_n v_n$	0
$k \in \mathbb{R}$	$+\infty$ (resp. $-\infty$)	$\frac{u_n}{v_n}$	0
$k \in \mathbb{R}^*$	0^+ (resp. 0^-)	$\frac{u_n}{v_n}$	$+m\infty$ (resp. $-m\infty$)
$k \in \mathbb{R}$	$l \in \mathbb{R}^*$	$\frac{u_n}{v_n}$	$\frac{k}{l}$
0	0	$\frac{u_n}{v_n}$	Forme indéterminée
$\pm\infty$	$\pm\infty$	$\frac{u_n}{v_n}$	Forme indéterminée

3.5. <u>Convergence ou divergence des suites aritmétiques, géométriques et arithmético-géométriques</u>

Soit une suite arithmétique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0, r \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} = u_n + r$.

(i) Si $r = 0$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est stationnaire (i.e. constante)

(ii) Si $r > 0$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$

(iii) Si $r < 0$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $-\infty$

Démonstration : pour le principe (rappeler la définition d'une limite), on démontre **(ii)**.
(ii) : $\forall n \in \mathbb{N}^*, r > 0, u_n = u_0 + nr$. Soit $\varepsilon > 0$, $u_0 + nr \ > \varepsilon \ \Rightarrow \ n > \frac{\varepsilon - u_0}{r}$. On peut poser n_0 premier entier strictement supérieur à $\frac{a-u_0}{r}$. Conclusion, on peut toujours trouver un rang au-delà duquel les u_n sont aussi grands qu'on veut.

Soit une suite géométrique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0, q \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} = qu_n$.

(i) Si $q = 0$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est stationnaire (i.e. constante, même nulle en l'occurrence)

(ii) Si $|q| \in]0; 1[$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0

(iii) Si $|q| = 1$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est stationnaire (i.e. constante)

(iv) Si $|q| \in]1; +\infty[$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $\pm\infty$ (selon le signe de q)

Démonstration : le principe est le même que celui utilisé au travers de la preuve précédente. On peut montrer qu'il existe toujours un rang n_0 tel qu'on se rapproche indéfiniment de 0 (pour démontrer (ii)) ou encore tel que le terme de la suite devient aussi grand qu'on le veut (pour démontrer (iv)).

Soit une suite arithmético-géométrique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $u_0, a, b \in \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_{n+1} = au_n + b$:

(i) Si $a = 0$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est stationnaire, i.e. constante (éventuellement à partir du rang 1).

(ii) Si $|a| \in]0; 1[$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\frac{b}{1-a}$

(iii) Si $a \in]1; +\infty[$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $\pm\infty$ (selon le signe de q)

(iv) Dans les autres cas, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est divergente.

4. Etude de convergence : quelques théorèmes

Voici quelques théorèmes classiques permettant d'établir la convergence d'une suite.

Théorème de convergence monotone : toute suite réelle monotone bornée est convergente.
Formulation mathématique : soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, Si $\forall n \in \mathbb{N}^* \ u_{n+1} - u_n \geq 0$ ou si $\forall n \in \mathbb{N}^* \ u_{n+1} - u_n \leq 0$ et si $\exists k \in \mathbb{R} / \forall n \in \mathbb{N} \ |u_n| \leq k$, alors $\exists l \in \mathbb{R}$ tel que $\lim_{n\to\infty} u_n = l$.

De la précédente formulation du « théorème de convergence monotone » découle les deux propositions équivalentes suivantes :

Toute suite réelle croissante et majorée est convergente.
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, Si $\forall n \in \mathbb{N}^*\ u_{n+1} - u_n \geq 0$ et si $\exists k \in \mathbb{R} / \forall n \in \mathbb{N}\ u_n \leq k$, alors $\exists l \in \mathbb{R}$ tel que $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = l$

Toute suite réelle décroissante et minorée est convergente
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, Si $\forall n \in \mathbb{N}^*\ u_{n+1} - u_n \leq 0$ et si $\exists k \in \mathbb{R} / \forall n \in \mathbb{N}\ u_n \geq k$

Egalement, voici une propriété souvent bien pratique :

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et soit $l \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = l \iff \lim\limits_{n\to\infty} u_n - l = 0$
On préfère parfois étudier la limite de la différence plutôt que la limite même.

Finalement, deux autres théorèmes également très utiles en pratique :

Théorème des gendarmes (convergence) **:**
Soient trois suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} w_n = l \in \mathbb{R}$.
Si $\exists n_0 \in \mathbb{N},\ n > n_0 \Rightarrow\ u_n \leq v_n \leq w_n$ alors $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = l$.
N.B. : ce théorème passe pour plutôt évident. Si, à un moment donné, une suite se fait écraser par deux voisins gendarmes, alors elle finit par se faire littéralement comprimer vers leur limite…

Théorème des gendarmes (convergence, autre version) **:**
Soient deux suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ où $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = 0$.
Si $\exists n_0 \in \mathbb{N}, n > n_0 \Rightarrow\ |u_n - l| \leq v_n$ alors $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = l$

Théorème des gendarmes (divergence vers $+\infty$) **:**
Soient deux suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ où $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = +\infty$.
Si $\exists n_0 \in \mathbb{N}, n > n_0\ \Rightarrow\ u_n \geq v_n$ alors $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = +\infty$

Théorème du point fixe de Banach :
Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle telle que $\forall n \in \mathbb{N}^*\ u_{n+1} = f(u_n)$. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente, alors elle converge vers la ou une solution de l'équation : soit $x \in \mathbb{R}, f(x) = x$.

5. Suites homographiques

A titre informel, nous allons étudier une autre forme de suites commune : les suites homographiques. Pourquoi ? Il advient souvent, en terminale, qu'on est à faire, bien guidé, l'étude d'une suite homographique. Certes, le terme n'est pas évoqué, il s'agit pourtant bien de cela. Aussi, pour information, l'on traite ci-après le cas général.

On appelle suite homographique une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de la forme : $u_{n+1} = \frac{au_n+b}{cu_n+d}$ avec $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.
N.B. : nous ne nous intéressons pas au cas où $c = 0$ dans le mesure où $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est alors une suite arithmético-géométrique, cas que nous avons déjà traité. On suppose donc que $c \neq 0$.

On a bien $u_{n+1} = f(u_n)$ en posant $\forall x \in \mathbb{R}, x \neq -\frac{d}{c}, f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$.

Pour étudier cette suite, on utilise une astuce classique consistant à introduire une nouvelle suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, judicieusement choisie et qualifiée de suite auxiliaire.

D'après le théorème du point fixe de Banach, si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers r, alors r est solution de l'équation :

$$(E) : f(x) = \frac{ax+b}{cx+d} = x \Leftrightarrow x(cx+d) = ax+b \Leftrightarrow cx^2 + (d-a)x + b = 0$$

On a : $\Delta = (d-a)^2 - 4cb$.

Deux cas se présentent alors :

<u>(E) admet une unique solution α</u> :

On suite alors la méthode suivante :

- On introduit la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $v_n = \frac{1}{u_n - a}$;
- On prouve que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmétique de raison r un certain nombre réel à déterminer. On en déduit que v_n diverge vers $\pm\infty$;
- Or, $v_n = \frac{1}{u_n - a} \Rightarrow v_n(u_n - a) = 1 \Rightarrow v_n u_n - a v_n = 1 \Rightarrow u_n = \frac{1 + a v_n}{v_n} = \frac{1}{v_n} + a$;
- On en déduit que $\frac{1}{v_n}$ converge vers 0 et *a fortiori* que u_n converge vers a.

<u>(E) admet deux solution α et β</u> :

On suite alors la méthode suivante :

- On introduit la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $v_n = \frac{u_n - \beta}{u_n - a}$;
- On prouve que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison q, un certain nombre réel à déterminer ;
- Or, $v_n = \frac{u_n - \beta}{u_n - \alpha} \Rightarrow v_n(u_n - \alpha) = u_n - \beta \Rightarrow (v_n - 1)u_n - \alpha v_n = -\beta$;
- On a donc $u_n = \frac{-\beta + \alpha v_n}{v_n - 1} = -\frac{\beta}{v_n - 1} + \alpha \frac{v_n}{v_n - 1}$ ou encore $u_n - \frac{\beta}{v_n - 1} + v_n \frac{\alpha}{1 - \frac{1}{v_n}}$;
- Si $|q| < 1$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 et donc : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\frac{\beta}{0-1} + 0 = \beta$. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers β ;
- Si $|q| > 1$, les $|v_n|$ tendent vers $+\infty$ et on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0 + \alpha \times 1 = \alpha$. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers α ;
- Finalement, si $q = \pm 1$, le suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.

A titre d'exercice, on pourra choisir quelques suites homographiques afin de vérifier les résultats explicités ci-dessus.