Cours : fiche n°1 - Étude de fonctions et dérivées

Thème : étude de fonction, équation de droite, nombre dérivée et dérivées usuelles, etc.

1. Rappels sur les fonctions

Qu'est-ce qu'une fonction ? Une fonction consiste à associer des nombres à d'autres nombres, typiquement par l'intermédiaire d'un calcul.

Exemple 1 : on peut se donner une fonction qu'on appellera $f(x)$ et qui, aux nombres 1, 2 et 5, associera respectivement les nombres 12, 28 et 2,12.

D'un point de vue mathématique, on écrira plutôt :

Soit : $f : \{1 ; 2 ; 5\} \to \{12 ; 28 ; 2{,}12\}$ $1 \mapsto 12$ $2 \mapsto 28$ $5 \mapsto 2.12$	$\{1 ; 2 ; 5\}$ est appelé ensemble de définition ou encore ensemble de départ. L'ensemble de définition est l'ensemble des nombres ou valeurs pour lesquelles la fonction est définie, c'est-à-dire pour lesquelles la fonction existe.
	$\{12, 28, 2.12\}$ est appelé ensemble d'arrivée. L'ensemble d'arrivé, aussi appelé ensemble image, est l'ensemble des nombres pouvant être « produits » par la fonction.

On pourra alors écrire par exemple : $f(1) = 12$, ce qui signifie que le nombre associé à 1 est le nombre 12.

On appelle $f(1)$ l'image de 1 par la fonction f. On dira également que 1 est l'antécédent de 12 par la fonction f.

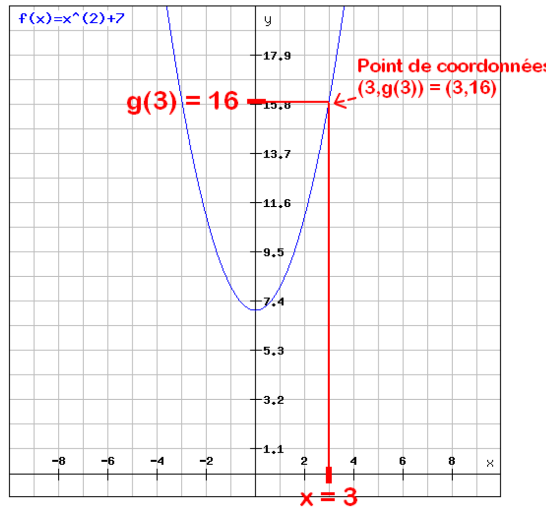
Par ailleurs, et encore par exemple, on peut dire que $f(7)$ n'existe pas puisque 7 ne fait pas partie de l'ensemble de définition. On dit que f n'est pas définie en 7.

Soit $f(x)$ une fonction définie pour tout $x \in I$ et dont l'ensemble d'arrivée est J. On dit que f est définie de I dans J ce qui s'écrite : $f: I \to J$ (on lit : « f de I dans J »).

Exemple 2 : on se donne cette fois-ci une fonction qu'on appelle $g(x)$ et qui, à tous réel positif (c'est-à-dire compris entre 0 inclus et $+\infty$), associe le nombre multiplié par lui-même plus une constante.

En termes mathématiques, on écrira :

Soit : $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ $x \mapsto x^2 + a$	L'ensemble de définition est ici $\mathbb{R}^+$, c'est-à-dire l'ensemble des nombres réels positifs.
	L'ensemble d'arrivée est ici $\mathbb{R}$, i.e. l'ensemble des réels, du moins une partie de l'ensemble des réels.



Ainsi, pour $a = 7$, on a : $g(3) = 3^2 + 7 = 16$

Par exemple toujours, $g(-1)$ n'existe pas puisque nous avons défini g pour tout réel positif. Or, -1 est négatif.

A droite, on a tracé la courbe représentative de g en supposant que a vaut 7.

La courbe représentative d'une fonction f est constituée de tous les points de coordonnées $(x, f(x))$.

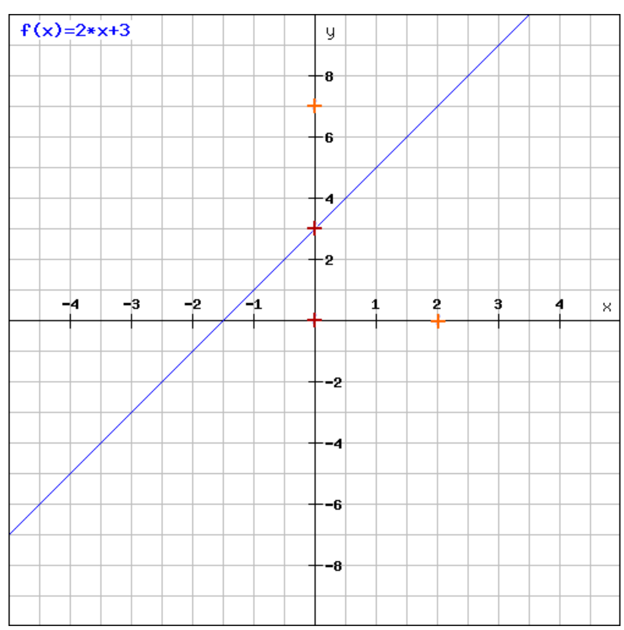
Attention ! On veillera bien à n'utiliser une fonction que sur son ensemble de définition. Par exemple la fonction $1/x$ n'est pas définie pour $x = 0$. On ne peut pas diviser par 0. Pareillement, la fonction $1/(1-x)$ n'est pas définie pour $x = 1$.

2. Équation de droite et coefficient directeur

2.1. Équation d'une droite

Toute droite (du plan euclidien) peut se mettre sous la forme : $f(x) = y = ax + b$.

- $\boldsymbol{a}$ est appelé coefficient directeur.
- $\boldsymbol{b}$ est une constante qui détermine le décalage de la droite sur l'axe des ordonnées. Comme $f(0) = a \times 0 + b = b$, on a $b = f(0)$.
- $\boldsymbol{f}$ est qualifiée de fonction affine. De plus, si b vaut 0, f est qualifiée de fonction linéaire.



A droite, on a représenté la droite d'équation $g(x) = 2x + 3$. L'on constate bien graphiquement que $g(\mathbf{0}) = 2 \times \mathbf{0} + 3 = \mathbf{3}$ ou encore que $g(\mathbf{2}) = 2 \times \mathbf{2} + 3 = \mathbf{7}$.

Les points de coordonnées ($\mathbf{0}$; $\mathbf{3}$) et ($\mathbf{2}$; $\mathbf{7}$) appar-tiennent donc bien à la courbe représentative de g.

2.2. <u>Calcul du coefficient directeur d'une droite</u>

Tout d'abord, quelle est la signification du coefficient directeur ?

Le coefficient directeur (ce fameux a vu plus haut) signifie tout bonnement que, lorsque l'on avance de 1 sur l'axe des abscisses, alors on monte de a sur l'axe des ordonnées. Si a est égal à -5 par exemple, alors, lorsqu'on avance de 1, on monte de -5, ou encore on descend de 5. Par conséquent, si a est positif, la fonction est croissante (la droite « monte »). Si a est négatif, la fonction est décroissante (la droite « descend »). Le coefficient a est en quelque sorte la « pente » de la droite.

Comment calculer le coefficient directeur (a) d'une droite et comment calculer le décalage sur l'axe des ordonnées (b) ? Pour calculer ces deux coefficients, nous avons besoin des coordonnées de deux points de la droite. Il suffit alors d'utiliser les formules suivantes :

Soient deux points d'une droite quelconque de coordonnées respectives $A(x_a ; y_a)$ et $B(x_b ; y_b)$. Alors, l'unique droite passant par ces deux points peut se mettre sous la forme $f(x) = y = ax + b$, avec :

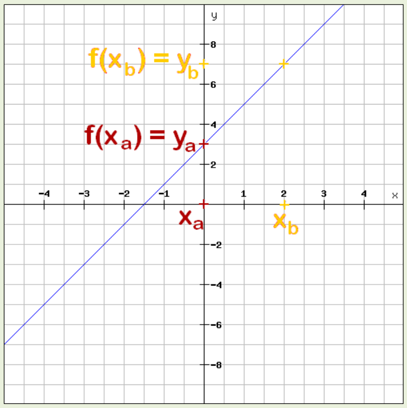
- Coefficient directeur :

$$a = \frac{y_b - y_a}{x_b - x_a} = \frac{f(x_b) - f(x_a)}{x_b - x_a}$$

- Décalage :

$$b = f(0) = f(x_a) - ax_a = f(x_b) - ax_b$$

Comme : $b = y - ax$



En reprenant l'exemple en 2.1, avec les points (2 ; 7) et (0 ; 3), on vérifie bien que $a = \frac{7-3}{2-0} = \frac{4}{2} = 2$ et $b = 7 - 2 \times 2 = 3$, ce qui justifie qu'on ait $g(x) = 2x + 3$.

3. Équation du second degré

3.1. <u>Résolution d'équations du second degré</u>

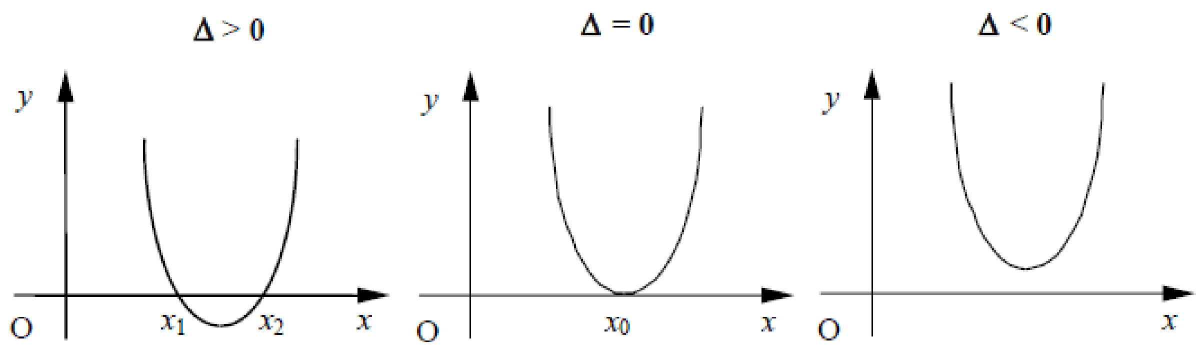
Nous traitons ici de la résolution d'équations du second degré réelles à coefficient réels. Une telle équation est une équation de la forme $(\boldsymbol{E}) : \boldsymbol{ax^2 + bx + c = 0}$ avec $a, b, c \in \mathbb{R}$ et x une variable réelle. Résoudre une telle équation, c'est déterminer la ou les valeurs de x satisfaisant l'équation (E). Pour ce faire, on calcule le discriminant.

On appelle le nombre $\Delta = b^2 - 4ac$ discriminant de l'équation (E).

On étudie le signe du discriminant en appliquant les propriétés suivantes (trois cas possibles).

Si $\Delta > 0$ alors l'équation (E) a deux solutions : $x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$. L'ensemble des solutions est donc : $S = \left\{\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} ; \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right\} = \frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$
Si $\Delta = 0$ alors l'équation (E) a une unique solution : $x = \frac{-b}{2a}$. L'ensemble des solutions est donc : $S = \left\{\frac{-b}{2a}\right\}$
Si $\Delta < 0$ alors l'équation (E) n'admet aucune solution réelle. L'ensemble des solutions est donc : $S = \{\emptyset\} = \emptyset$ (l'ensemble vide).

Visuellement, les trois cas évoqués ci-avant se traduisent par les courbes représentées ci-après. On notera bien qu'on a choisi dans les trois cas ci-dessous $\boldsymbol{a > 0}$ de sorte que les courbes sont orientées « vers le haut » :



Si l'on avait choisi $\boldsymbol{a < 0}$, les courbes seraient orientées « vers le bas ».

3.2. <u>Résolution d'inéquations du second degré</u>

On qualifie de fonction polynomiale de degré 2 une fonction de la forme $\boldsymbol{f(x) = ax^2 + bx + c}$. Précédemment, on cherchait à résoudre l'équation $f(x) = 0$. On cherche à présent à résoudre chacune des inéquations suivantes : $f(x) < 0$, $f(x) \leq 0$, $f(x) \geq 0$ et $f(x) > 0$.

Si $\Delta > 0$, on note $x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$: • Si $a > 0$ alors : $ax^2 + bx + c < 0$ si et seulement si $x \in]x_1; x_2[$ $ax^2 + bx + c > 0$ si et seulement si $x \in]-\infty; x_1[\cup]x_2; +\infty[$ $ax^2 + bx + c = 0$ si et seulement si $x \in \{x_1 ; x_2\}$ • Si $a < 0$ alors : $ax^2 + bx + c < 0$ si et seulement si $x \in]-\infty; x_1[\cup]x_2; +\infty[$ $ax^2 + bx + c > 0$ si et seulement si $x \in]x_1; x_2[$ $ax^2 + bx + c = 0$ si et seulement si $x \in \{x_1 ; x_2\}$
Si $\Delta = 0$, on note : $x_1 = \frac{-b}{2a}$: • Si $a > 0$ alors $ax^2 + bx + c > 0$ pour tout $x \neq x_1$ • Si $a < 0$ alors $ax^2 + bx + c < 0$ pour tout $x \neq x_1$

Si $\Delta < 0$:
- Si $a > 0$ alors $ax^2 + bx + c > 0$ pour tout x réél
- Si $a < 0$ alors $ax^2 + bx + c < 0$ pour tout x réél

Les propriétés listées ci-dessus sont plutôt rébarbatives. Aussi, n'hésitez pas à plutôt retenir la représentation visuelle de la page précédente, laquelle vous permet de retrouver les retrouver, moyennant un peu d'imagination.

4. Tangente et nombre dérivé

4.1. Nombre dérivé

Qu'est-ce qu'une tangente ? C'est l'unique droite qui, pour un point d'abscisse donnée, ne touche la courbe qu'en un point. La tangente n'existe donc que si elle est unique. Autrement dit, la tangente en un point d'une courbe peut être vue comme la droite qui approche le mieux la courbe en ce point.

Qu'est-ce que le nombre dérivé en un point d'une courbe ? C'est le coefficient directeur de la tangente en ce point, si la tangente existe !

Formellement, on peut donner deux définitions équivalentes du nombre dérivé. Il importe de bien connaître les deux définitions.

Soit une fonction $f: I \to J$, et soit $x, x_0 \in I$. Le nombre dérivé de f en x_0, noté $f'(x_0)$, s'il existe, vaut :	$f'(x_0) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$
Soit une fonction $f: I \to J$, soit $x_0 \in I$ et soit h suffisamment petit pour que $x_0 + h \in I$. Le nombre dérivé de f en x_0, noté $f'(x_0)$, s'il existe, vaut :	$f'(x_0) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$

La quantité $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ ou $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ est appelée taux de variation.

Explication :
- Le taux de variation doit être vu comme le coefficient directeur d'une droite passant par le point $(x_0; f(x_0))$ et un autre point quelconque de la courbe dont les coordonnées sont $(x; f(x))$ ou encore $(x_0 + h; f(x_0 + h))$. Le petit h représente dès lors une petite distance entre x_0 et $x_0 + h$.
- Si on calcule le coefficient directeur de la droite passant par ces deux points, on retrouve bien ce fameux taux de variation.
- Imaginons maintenance qu'on rapproche indéfiniment le « point quelconque » de $(x_0; f(x_0))$. Les points vont quasiment finir par se confondre. Autrement dit, on a diminué le petit h jusqu'à ce qu'il tende vers 0. D'où l'utilisation de la notation $\lim\limits_{h \to 0}$. Ça y est ! On a obtenu le nombre dérivé !

En utilisant les formules établies en 2.2, on peut même obtenir l'équation de la tangente en x_0.

L'équation de la tangente de f en x_0 a pour équation $T_{x_0}(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$.

Démonstration :

- Par définition du nombre dérivé (en a en l'occurrence), le coefficient directeur de T (tangente en x_0) est $f'(x_0)$.
- Par ailleurs, si l'on utilise le calcul de « b » vu en 2.2, on a ici :
  $a = f'(x_0)$
  $b = f(x_0) - ax_0 = f(x_0) - f'(x_0)x_0$.
- On obtient donc : $T_a(x) = ax + b = f'(x_0)x + f(x_0) - f'(x_0)x_0 = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$.

4.2. Ensemble de dérivabilité

Ce qu'il faut bien comprendre, c'est qu'une fonction n'est pas forcément dérivable partout. Elle n'est pas même forcément dérivable sur son ensemble de définition. Plus exactement, une fonction est dérivable sur tout ou partie de son ensemble de définition. Il est donc vivement conseillé de connaître les ensembles de dérivabilité des fonctions (du moins des fonctions les plus courantes, voir ci-après).

Qu'est-ce qu'un ensemble de dérivabilité ? L'ensemble de dérivabilité est l'ensemble des valeurs pour lesquelles la fonction dispose d'un nombre dérivé. A titre d'exemple, si on a $f(x) = x^2$ et $g(x) = \sqrt{x}$ alors f est dérivable sur $\mathbb{R}$ (c'est-à-dire pour tout $x \in \mathbb{R}$) mais g est dérivable sur $\mathbb{R}_*^+$(c'est-à-dire pour tout $x \in]0; +\infty[$). Pourtant, $\sqrt{x}$ est bien définie sur $\mathbb{R}^+$.

4.3. Fonctions dérivées usuelles

Fonction	Ensemble de définition	Fonction dérivée	Ensemble de dérivabilité
k (avec k réel)	$\mathbb{R}$	0	$\mathbb{R}$
kx (avec k réel)	$\mathbb{R}$	k	$\mathbb{R}$
x^n (avec n entier)	$\mathbb{R}$	nx^{n-1}	$\mathbb{R}$
$\sqrt{x}$	$\mathbb{R}^+$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\mathbb{R}_*^+$
$\frac{1}{x}$	$\mathbb{R}^*$	$-\frac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}^*$
$\ln(x)$	$\mathbb{R}_*^+$	$\frac{1}{x}$	$\mathbb{R}_*^+$
e^x	$\mathbb{R}$	e^x	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{x^n}$	$\mathbb{R}^*$	$-\frac{n}{x^{n+1}}$	$\mathbb{R}^*$

$kf(x)$	Sur l'ensemble de définition de $f(x)$	$kf'(x)$	Sur l'ensemble de dérivabilité de $f(x)$
$f(x)+g(x)$	---	$f'(x)+g'(x)$	---
$u(x)v(x)$	---	$u'(x)v(x)+u(x)v'(x)$	---
$\frac{1}{v(x)}$	---	$-\frac{v'(x)}{v(x)^2}$	---
$\frac{u(x)}{v(x)}$	---	$\frac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{v(x)^2}$	---
$ln(u(x))$	---	$\frac{u'(x)}{u(x)}$	---
$e^{u(x)}$	---	$u'(x)e^{u(x)}$	---

--- : hors programme ou inutile pour l'examen

A bien retenir !

- Dans un ensemble « classique », on ne peut pas diviser par 0 !
- Sur l'ensemble des réels, seuls les nombres positifs ou nuls ont une racine carrée !
- Le carré d'un nombre réel est toujours positif !
- L'exponentielle n'est qu'une fonction puissance (les formules valables pour les puissances sont valables pour l'exponentielle) !

4.4. Quelques exemples

Exemple 1 : calculer la dérivée de la fonction $f(x) = -5x^3 + x^2 + x + 1$.

La dérivée d'une somme est égale à la somme des dérivées.

La fonction f est bien définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que somme de fonctions définies et dérivables sur $\mathbb{R}$. Pour tout x réel, on peut écrire $f(x)$ sous la forme $f(x) = ku(x) + v(x) + w(x) + y(x)$
Avec : $k = -5$, $u(x) = x^3$, $v(x) = x^2$, $w(x) = x$ et $y(x) = 1$.
Alors : $u'(x) = 3x^2$, $v'^{(x)} = 2x$, $w'(x) = 1$ et $y'(x) = 0$
D'où : $f'(x) = ku'(x) + v(x) + w(x) + y(x) = -5 \times 3x^2 + 2x + 1$

Soit finalement : $f'(x) = -15x^2 + 2x + 1$

Exemple 2 : calculer la dérivée de la fonction $g(x) = \frac{3x^2-x+1}{x-1}$.

On remarque que $g(x)$ est de la forme $g(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$ avec $u(x) = 3x^2 - x + 1$ et $v(x) = x - 1$.

Quant à $u(x)$, il peut s'écrire $u(x) = 3a(x) - b(x) + c(x)$.
Il vient $u'(x) = 3a'(x) - b'(x) + c'(x) = 3 \times 2x - 1 + 0 = 6x - 1$.
Par ailleurs $v'(x) = 1$.

Enfin : $g'(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v(x)^2} = \frac{(6x-1)(x-1) - (3x^2 - x + 1)(1)}{(x-1)^2} = \frac{6x^2 - 6x - x + 1 - 3x^2 + x - 1}{(x-1)^2} = \frac{3x^2 - 6x}{(x-1)^2}$
Soit encore $g'(x) = \frac{3x(x-2)}{(x-1)^2}$ après factorisation par $3x$.

Important ! On retiendra qu'il est indispensable de :

- Bien connaître ses formules de dérivations !
- Bien poser et décomposer le calcul afin de ne pas commettre d'inutiles erreurs de calcul : erreurs de signe, erreurs de développement ou encore de factorisation !

5. Étude de fonctions

5.1. Dérivée première et sens de variation

L'étude d'une fonction passe avant tout par la connaissance de son ensemble de définition, de sa fonction dérivée et du calcul des limites de la fonction à ses extrémités. Voici les quelques propriétés essentielles à retenir :

Si la fonction dérivée f' d'une fonction f est positive sur un intervalle I, alors f est croissante sur I.
$f' \geq 0 \Rightarrow f\ croissante$
N.B. : cette notation est mathématiquement incorrecte. Elle doit uniquement servir de moyen mnémotechnique.

Si la dérivée f' d'une fonction f est négative sur un intervalle I, alors f est décroissante sur I.
$f' \leq 0 \Rightarrow f\ croissante$

Si la dérivée f' d'une fonction f est nulle (égale à 0) sur un intervalle I, alors f est constante sur I.
$f' = 0 \Rightarrow f\ constante$

Si la dérivée f' d'une fonction f s'annule (est égale à 0) en un unique point d'abscisse a d'un intervalle I, alors f atteint un extremum a. Un extremum est soit un maximum, soit un minimum.
Deux cas se présentent alors :

- Si f est successivement croissante puis décroissante sur l'intervalle I, l'extremum est un maximum local (c'est-à-dire le maximum de f sur l'intervalle I mais pas nécessairement en-dehors de cet intervalle).
- Si f est successivement décroissante puis croissante sur l'intervalle I, l'extremum est un minimum local (c'est-à-dire le minimum de f sur l'intervalle I mais pas nécessairement en-dehors de cet intervalle).

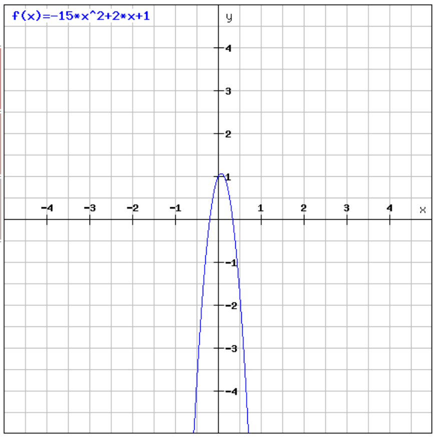
Remarque : si I est l'ensemble de définition de la fonction, alors l'extremum est un minimum ou un maximum global (c'est-à-dire valable partout).

Exemple : étudier la fonction $f(x) = -5x^3 + x^2 + x + 1$.

La fonction f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ car il s'agit d'une somme de fonctions définies et dérivables sur $\mathbb{R}$. Nous avons établi en 4.4 que $f'(x) = -15x^2 + 2x + 1$.

La question est à présent : quand as-t-on $f'(x) > 0$, $f'(x) < 0$ et $f'(x) = 0$?

Tout d'abord, affichons la courbe de cette fonction à la calculatrice :



Le discriminant du polynôme $P = -15x^2 + 2x + 1$ est :
$\Delta = 2^2 - 4 \times (-15) \times 1 = 4 - (-60) = 4 + 60 = 64 = 8^2$

$\Delta > 0$ donc l'équation $P = 0$ possède deux solutions :

$x_1 = \dfrac{-2-8}{2 \times (-15)} = \dfrac{-10}{-30} = \dfrac{1}{3}$	$x_2 = \dfrac{-2+8}{2 \times (-15)} = \dfrac{6}{-30} = -\dfrac{1}{5}$

Or, le coefficient devant x^2 est $-15 < 0$.
On a donc :
$f'(x) - 15x^2 + 2x + 1 \geq 0$ pour tout $x \in \left[-\frac{1}{5} ; \frac{1}{3}\right]$ *et*
$f'(x) - 15x^2 + 2x + 10 \leq 0$ pour tout $x \in \left]-\infty; -\frac{1}{5}\right] \cap \left[\frac{1}{3}; +\infty\right[$

On peut désormais dresser le tableau de signe de $f'(x)$ et le tableau de variation de f.

x	$-\infty$		$-\frac{1}{5}$		$\frac{1}{3}$		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
Variations de f	$+\infty$	$\searrow$	$\frac{22}{25}$	$\nearrow$	$\frac{26}{27}$	$\searrow$	$-\infty$

<u>Détail des calculs</u> :

- $f\left(-\frac{1}{5}\right) = -5(-\frac{1}{5})^3 + (-\frac{1}{5})^2 - \frac{1}{5} + 1 = \frac{1}{25} + \frac{1}{25} - \frac{1}{5} + 1 = \frac{22}{25}$
- $f\left(\frac{1}{3}\right) = -5(\frac{1}{3})^3 + (-\frac{1}{3})^2 - \frac{1}{3} + 1 = -\frac{5}{27} + \frac{1}{9} - \frac{1}{3} + 1 = \frac{26}{27}$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} -5x^3 + x^2 + x + 1 = \lim\limits_{x \to +\infty} -x^3 = \lim\limits_{x \to -\infty} x^3 = -\infty$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} x^3 = +\infty$

Les deux derniers calculs seront abordés lorsque nous étudierons le calcul de limites.

5.2. <u>Interprétation physique de la dérivée première</u>

Lorsqu'on dérive une fonction f une fois, on calcule sa dérivée première, notée f' ou $f^{(1)}$. Rien n'empêche de dériver la fonction dérivée. On obtient alors la dérivée seconde, notée f'' ou encore $f^{(2)}$.

En physique, les fonctions dépendent souvent du temps noté t. Et l'on préfèrera noter la dérivée $\frac{df(t)}{dt}$.

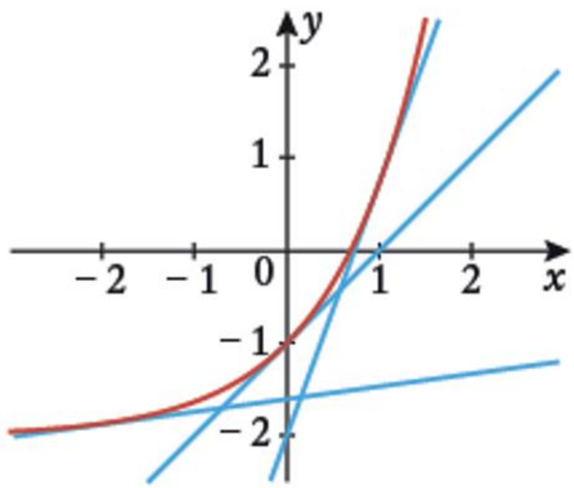
En physique encore, mais en chimie également, on est parfois amené à étudier la trajectoire d'un objet quelconque. Il peut s'agir d'un astre, d'un solide (exemple : une boule de pétanque), d'un fluide, d'une particule et plus encore. Cette trajectoire peut être décrite par une fonction. La dérivée s'interprète alors comme la vitesse instantanée, c'est-à-dire la vitesse de l'objet à un instant t.

5.3. Dérivée seconde et convexité

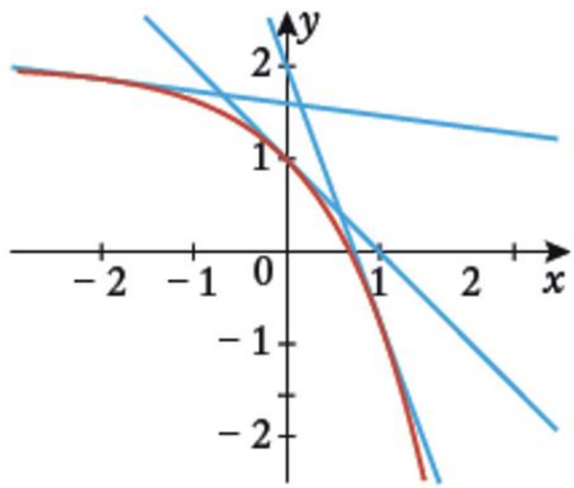
Intuitivement, on peut définir les notions concavité et de convexité comme suit :

Une fonction f est dite concave sur un intervalle I de son ensemble de définition si, pour toute paire de points $A(x_a; f(x_a))$ et $B(x_b; f(x_b))$ avec $x_a < x_b$, la courbe représentative de f est située au-dessus du segment AB sur l'intervalle $[x_a; x_b]$.
Une fonction f est dite convexe sur un intervalle I de son ensemble de définition si, pour toute paire de points $A(x_a; f(x_a))$ et $B(x_b; f(x_b))$ avec $x_a < x_b$, la courbe représentative de f est située en-dessous du segment AB sur l'intervalle $[x_a; x_b]$.

Illustration :



Fonction convexe



Fonction concave

Sans toutefois démontrer ce qui suit, voici quelques propriétés nous permettant d'établir qu'une fonction est convexe ou concave sur un intervalle donné.

Si f est une fonction concave (resp. convexe) sur un intervalle I, $-f$ est convexe (resp. concave) sur l'intervalle I.
Si f est définie et deux fois dérivable sur un intervalle I, alors : • Si $f''(x) > 0$ pour tout x de I, alors f est convexe sur l'intervalle I. • Si $f''(x) < 0$ pour tout x de I, alors f est concave sur l'intervalle I.

Exemple : soit la fonction $f(x) = -5x^3 + x^2 + x + 1$.

D'après 4.4, on sait que $f'(x) = -15x^2 + 2x + 1$.
On en déduit que : $f''(x) = -15 \times 2x + 2 = -30x + 2$.
D'où : $f''(x) = -30x + 2 \geq 0 \Leftrightarrow -30x \geq -2 \Leftrightarrow \mathbf{30x \leq 2} \Leftrightarrow x \leq 2/30 = 1/15$.

Rappel : lorsque qu'on divise les deux membres d'une inéquation par un nombre négatif, la relation de comparaison « change de sens », à savoir ≥ devient ≤ et réciproquement.

Conclusion : f est convexe sur l'intervalle $]-\infty; \frac{1}{15}]$ et concave sur l'intervalle $[\frac{1}{15}; +\infty[$.